Άσκηση. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$f(x,t) = \sin(x+ct), \qquad g(x,t) = \sin(x-ct),$$

όπου c είναι μία σταθερά, επαληθεύουν την σχέση

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

[Γιά σχόλια σε αυτή την άσκηση δείτε και το βιβλίο του Finney, σελ. 869, ασκ. 69.]

Λύση: Η άσκηση έγινε στο μάθημα. Εδώ θα δώσουμε αναλυτικά την λύση με δύο τρόπους.

(α) Ορίζουμε $z(x,t) = x+ct$, και $f(x,t) = w(z(x,t)) = \sin z$. Ώστε, με τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \cos z = \cos(x+ct),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x+ct) = 1.$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\cos(x+ct) = \frac{d(\cos z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin z = -\sin(x+ct).$$

Επίσης

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = (\cos z)\ c = c\ \cos(x+ct),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x+ct) = c.$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}[c\,\cos(x+ct)] = \frac{d(c\,\cos z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -c^2\,\sin z = -c^2\,\sin(x+ct).$$

Από τις Εξ. (1) και (2) προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Γιά την συνάρτηση g δουλεύουμε τελείως ανάλογα. Ορίζουμε τώρα $z = x-ct$ και $w(z) = \sin z$ και έχουμε $\partial z/\partial x = 1$, $\partial z/\partial t = -c$. Ώστε

$$(3) \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \cos z, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{d(\cos z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin z.$$

Επίσης

$$(4) \qquad \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -c\ \cos z, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) = \frac{d(-c\,\cos z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -c^2\,\sin z.$$

Από τις Εξ. (3) και (4) προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

(β) Ένας δεύτερος, πιό σύντομος τρόπος γιά να αποδείξουμε την ζητούμενη σχέση είναι ο εξής.
Ορίζουμε $z = x + ct$, και $f(x,t) = w(z(x,t)) = \sin z$. Ώστε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{d^2w}{dz^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2w}{dz^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = c\,\frac{dw}{dz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(c\,\frac{dw}{dz}\right) = c\,\frac{d^2w}{dz^2}\frac{\partial z}{\partial t} = c^2\,\frac{d^2w}{dz^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Από τις Εξ. (5) και (6) προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Γιά την συνάρτηση g δουλεύουμε τελείως ανάλογα.
Ορίζουμε τώρα $z = x - ct$ και $w(z) = \sin z$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{d^2w}{dz^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2w}{dz^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -c\,\frac{dw}{dz} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\,\frac{dw}{dz}\right) = -c\,\frac{d^2w}{dz^2}\frac{\partial z}{\partial t} = c^2\,\frac{d^2w}{dz^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Από τις Εξ. (7) και (8) προκύπτει η ζητούμενη σχέση.