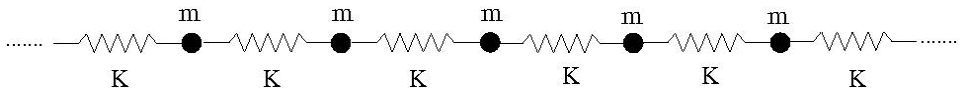
1. Απειρη αλυσιδα μαζων συζευγμενων με ελατηρια

1.1. **Εξισώσεις κίνησης και λύσεις.** Έστω μία αλυσίδα ατόμων που εκτείνεται από το $-\infty$ έως το ∞. Η κάθε μάζα συνδέεται με ελατήρια με τους άμεσους γείτονές της. Όλες οι μάζες είναι ίδιες καθώς και όλα τα ελατήρια.



Σχημα 1. Άπειρη αλυσίδα ατόμων τα οποία συνδέονται με ελατήρια με τους άμεσους γείτονές τους. Οι αποστάση μεταξύ γειτονικών ατόμων στην θέση ισορροπίας είναι d.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} m\,\dot{q}_\ell^2.$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$V = \ldots + \frac{1}{2}K(q_\ell - q_{\ell-1})^2 + \frac{1}{2}K(q_{\ell+1} - q_\ell)^2 + \ldots = \frac{1}{2}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} K\,(q_{\ell+1} - q_\ell)^2.$$

Αν αναπτύξουμε τα τετράγωνα παρατηρούμε ότι αυτή η δυναμική ενέργεια είναι της μορφής που μελετήσαμε στο προηγούμενο μάθημα.

Η Lagrangian είναι

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left[\, m\,\dot{q}_\ell^2 - K\,(q_{\ell+1} - q_\ell)^2 \,\right].$$

Βλέπουμε ότι αυτή η Lagrangian είναι της μορφής που μελετήσαμε στο προηγούμενο μάθημα, εδώ όμως έχουμε αλληλεπίδραση μόνο μεταξύ αμέσων γειτόνων.

Οι εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας σε τυχούσα θέση n είναι

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} \Rightarrow m\ddot{q}_n = -K(q_n - q_{n-1}) + K(q_{n+1} - q_n) \Rightarrow$$

$$m\ddot{q}_n - K(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}) = 0, \qquad n = -\infty, \ldots, \infty. \tag{1}$$

Για να βρούμε λύσεις των παραπάνω εξισώσεων κάνουμε τα ακόλουθα βήματα. Υποθέτουμε εξάρτηση από τον χρόνο

$$q_n = a_n e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

όπου ω είναι συχνότητα που πρέπει να υπολογιστεί και a_n είναι μια μεταβλητή που εξαρτάται από την θέση του σωματίου. Η Εξ. (1) γίνεται

$$m\omega^2\, q_n + K(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}) = 0. \tag{3}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι μπορούμε να βρούμε λύση της παραπάνω αν δοκιμάσουμε την μορφή

$$a_n = A\, e^{ikX_n} = A\, e^{iknd}, \tag{4}$$

όπου A είναι μία σταθερά, $X_n = nd$ είναι η θέση ισορροπίας του σωματίου n και d είναι η απόσταση μεταξύ γειτονικών σωματίων. Η μορφή (4) είναι περιοδική στον χώρο και το k είναι ένας αριθμός που σχετίζεται με το μήκος της περιόδου (αν λ είναι η περίοδος τότε $k = 2\pi/\lambda$).

Συνδιάζοντας τις Εξ. (2) και (4) έχουμε να δοκιμάσουμε την λύση

$$q_n = A\, e^{i(knd-\omega t)}. \tag{5}$$

Το A είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Αντικαθιστούμε την τελευταία στην Εξ. (1) η οποία δίνει

$$m\omega^2 + K(e^{ikd} - 2 + e^{-ikd}) = 0 \Rightarrow m\omega^2 + 2K[\cos(kd) - 1] = 0.$$

Εδώ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2\phi/2 = (1-\cos\phi)/2$ και έχουμε τελικά

$$\omega^2 = \frac{4K}{m}\,\sin^2\left(\frac{kd}{2}\right), \tag{6}$$

η οποία δίνει την σχέση μεταξύ της συχνότητας ω και του κυματάριθμου k και λέγεται *σχέση διασποράς*.

Είναι σαφές ότι οι λύσεις (5) παριστάνουν κύματα.

1.2. **Παρατηρήσεις.** Για την κατανόηση των λύσεων (5) των εξίσωσεων (1) έχουμε τις εξης παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 1: Βρίσκουμε ότι

$$q_{n+1} = A\, e^{i[kd(n+1)-\omega t]} = A\, e^{i[knd-\omega t]}\, e^{ikd} = q_n\, e^{ikd},$$

άρα kd είναι η διαφορά φάσης μεταξύ γειτονικών σωματίων.

Αν λ είναι το μήκος κύματος τότε $k = 2\pi/\lambda$. Στην περίπτωση $k \to 0$, η παραπάνω διαφορά φάσης $kd \to 0$ και το μήκος κύματος πηγαίνει στο άπειρο.

Στην περίπτωση $kd = \pi \Rightarrow k = \pi/d$ βρίσκουμε $q_n = A\, e^{i(n\pi-\omega t)} = (-1)^n\, A\, e^{-i\omega t}$, δηλαδή όλα τα σωμάτια ταλαντώνονται με μια συχνότητα ω αλλά γειτονικά σωμάτια έχουν αντίθετες αποκλίσεις $\pm A$. Από την σχέση διασποράς βρίσκουμε για την συχνότητα $\omega^2(k = \pi/d) = 4K/m$.

Παρατήρηση 2: Γιά κάθε k έχουμε ως λύση των εξισώσεων ένα κύμα με συχνότητα ταλάντωσης που δίνεται από την σχέση διασποράς (6). Αυτή είναι η συχνότητα ταλάντωσης κάθε σωματίου για την συγκεκριμένη λύση.

Παρατήρηση 3: Η φάση του κύματος στην θέση n είναι $\phi \equiv knd - \omega t = kX_n - \omega t$. Η φάση αυτή καθορίζει πλήρως την τιμή της κυματικής λύσης (5). Η φάση διαδίδεται. Για να βρούμε την ταχύτητα διάδοσης της φάσης (και του κύματος) θεωρούμε την φάση $\phi = kX_{n_1} - \omega t_1$ στην θέση n_1 την στιγμή t_1 και επίσης την ίδια φάση σε μιά μεταγενέστερη στιγμή t_2 σε μιά διαφορετική θέση n_2, άρα γράφουμε $\phi = kX_{n_2} - \omega t_2$. Βρίσκουμε

$$kX_{n_1} - \omega t_1 = kX_{n_2} - \omega t_2 \Rightarrow \frac{X_{n_2} - X_{n_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k}. \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k}.$$

Στην τελευταία σχέση το v_ϕ δηλώνει την ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση.

Για παράδειγμα, αν πάρουμε $k \to 0$ έχουμε $\sin(kd/2) \approx kd/2$, άρα

$$\omega^2 = \frac{4K}{m}\,\frac{k^2d^2}{4} \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{K}{m}\,d^2 \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K}{m}}\,d,$$

η οποία είναι μάλιστα η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο στερεό.

Παρατήρηση 4: Βλέπουμε ότι

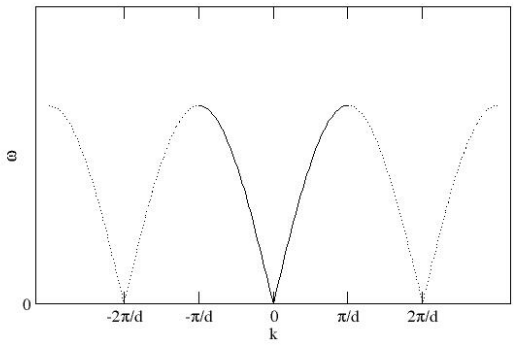
$$\omega^2 \leq \frac{4K}{m}.$$

Άρα μία αλυσίδα ατόμων υποστηρίζει ταλαντώσεις συχνότητας μόνο μικρότερες τις πιό πάνω τιμής. Δηλαδή το σύστημα δρα σαν φίλτρο για μεγαλύτερες συχνότητες.

1.3. **Συζήτηση του Brillouin.** Ας ξεκινήσουμε από το δεδομένο ότι η αλυσίδα σωματίων δέχεται κυματικές λύσεις, οι οποίες βέβαια θα είναι της μορφής (5), ενώ η χωρική διαμόρφωση του κύματος είναι η (4). Η μεταβολή της φάσης μεταξύ γειτονικών σωματίων είναι kd. Αν τώρα υποθέσουμε ένα νέο k' το οποίο δίνει μεταβολή φάσης $k'd = kd + 2m\pi$ (όπου m ακέραιος), η παραπάνω λύση δεν μεταβάλεται: $e^{ik'nd} = e^{i(knd+2m\pi)} = e^{iknd}$. Συμπεραίνουμε ότι τα k και $k' = k + 2m\pi/d$ δίνουν τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις και άρα πρέπει να δώσουν και το ίδιο ω. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $\omega = \omega(k)$ θα είναι μία περιοδική συνάρτηση του k με περίοδο $2\pi/d$. Πραγματικά, είδαμε ότι από την πλήρη λύση των εξισώσεων προέκυψε η σχέση (6):

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}} \left|\sin\left(\frac{kd}{2}\right)\right|, \tag{7}$$

η οποία έχει ως προς k περίοδο $2\pi/d$. Ώστε, για να περιγράψουμε τις ιδιότητες του συστήματος αρκεί να εκλέξουμε ένα διάστημα μήκους $2\pi/d$ στον άξονα k. Η εκλογή $-\pi/d < k < \pi/d$ λέγεται πρώτη ζώνη Brillouin.



Σχημα 2. Η συχνότητα ω είναι περιοδική συνάρτηση του κυματάριθμου k, όπως στην Εξ. (7). Η πρώτη ζώνη Brillouin σημειώνεται με την συνεχή γραμμή.