1. Διαγραμμα φασης εξισωσεων δευτερου βαθμου

1.1. **Το απλό εκκρεμές.** Η εξίσωση κίνησης για το απλό εκκρεμές είναι

$$m\ell^2\,\ddot{\theta} + mg\ell\,\sin\theta = 0, \tag{1}$$

όπου m, g, ℓ είναι σταθερές. Παρατηρούμε ότι

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\,\dot{\theta}$$

και γράφουμε την εξίσωση (1) ως

$$m\ell^2\,\dot{\theta}\,\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} + mg\ell\,\sin\theta = 0.$$

Έτσι, ενώ είχαμε εξίσωση για την μεταβλητη θ με τον χρόνο t, τώρα έχουμε περάσει σε μιά εξίσωση μεταξύ θ και $\dot{\theta}$. Ολοκληρώνουμε την τελευταία εξίσωση

$$m\ell^2\int \dot{\theta}\,d\dot{\theta} + mg\ell\int \sin\theta\,d\theta = 0$$

και βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}\,m\ell^2\,\dot{\theta}^2 - mg\ell\,\cos\theta = C, \tag{2}$$

το οποίο είναι ολοκλήρωμα της κίνησης (είναι μάλιστα το ολοκλήρωμα της ενέργειας). Εάν υποθέσουμε κάποιες αρχικές συνθήκες $\theta(t=0), \dot{\theta}(t=0)$ τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης και έτσι να βρούμε την σταθερά C. Δηλαδή, κάθε τιμή της C αντιστοιχεί σε διαφορετική λύση του προβλήματος.

Η αρχική εξίσωση (1) δεν μπορεί να λυθεί έτσι ώστε να δωθεί η λύση σε κλειστή μορφή. Όμως, με την βοήθεια του ολοκληρώματος (2) μπορούμε να δώσουμε ένα διάγραμμα της κίνησης του συστήματος στον χώρο των καταστάσεων του. Η κάθε κατάσταση του συστήματος καθορίζεται από τις τιμές των δύο μεταβλητών θ και $\dot{\theta}$. Ο χώρος των δύο αυτών μεταβλητών λέγεται χώρος των φάσεων. Η κίνηση του συστήματος αναπαρίσταται με καμπύλες στον χώρο των φάσεων. Στην περίπτωση του απλού εκκρεμούς αυτές δίνονται από την εξίσωση (2).

Για την κατανόηση του διαγράμματος φάσης του απλού εκκρεμούς, το οποίο δίνεται στο Σχήμα 1, εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:

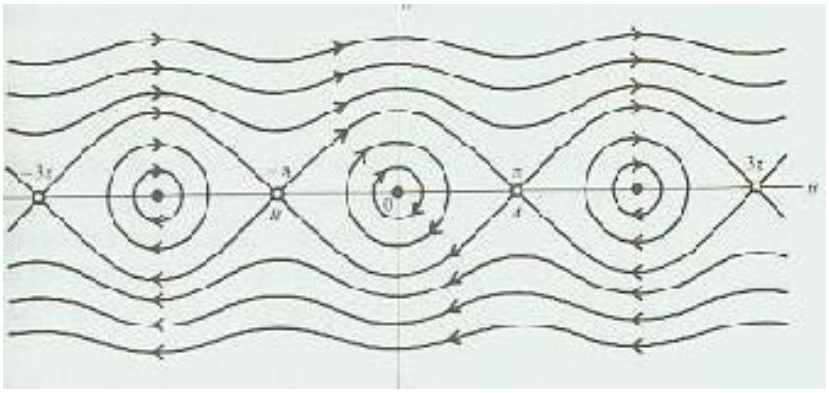
Σημεία ισορροπίας: Θεωρούμε $C = -mg\ell$, οπότε η εξίσωση (2) ικανοποιείται μόνο για $\dot{\theta} = 0$, και $\theta = 0, \pm 2\pi, \ldots$. Αυτές οι τιμές αναπαρίστανται με μεμονομένα σημεία στο διάγραμμα φάσης, ενώ οι αντίστοιχες λύσεις των εξισώσεων (1) είναι $\theta(t) = 0, \pm 2\pi, \ldots$.

Επίσης, για $C = mg\ell$ έχουμε λύσεις της (2) τα σημεία $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi \ldots$. Όλα τα προαναφερθέντα σημεία λέγονται σημεία ισορροπίας και αντιστοιχούν σε θέσεις ισορροπίας του εκκρεμούς.

Απλή αρμονική ταλάντωση: Γιά $C \approx -mgl$ μπορούμε να γράψουμε $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ ώστε η (2) γράφεται

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = C \Rightarrow \dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\,\theta^2 = C',$$

όπου C' είναι μία νέα σταθερά. Η τελευταία εξίσωση δίνει μία οικογένεια ελλείψεων στο διάγραμμα φάσης, οι οποίες περιβάλλουν τα σημεία ισορροπίας $\theta = 0, \pm 2\pi, \ldots$. Η κίνηση



ΣΧΗΜΑ 1. Διάγραμμα φάσης για το απλό εκκρεμές. (Από το βιβλίο Jordan & Smith, "Nonlinear Ordinary Differential Equations".)

του εκκρεμούς παρίσταται διαγράφοντας μία έλλειψη. Η φορά διαγραφής είναι από αριστερά προς τα δεξιά για $\dot{\theta} > 0$ και απο δεξιά προς αριστερά για $\dot{\theta} < 0$. Αυτές οι καμπύλες περιγράφουν απλή αρμονική ταλάντωση.
Περιστροφική κίνηση: Έστω $C > mg\ell$, οπότε η (2) δίνει $\dot{\theta} \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το θ είναι μιά μονότονη συνάρτηση του χρόνου. Για $\dot{\theta} > 0$ παίρνουμε μη κλειστές καμπύλες με φορά από αρνητικά θ προς θετικά, ενώ για $\dot{\theta} < 0$ παίρνουμε αντίστοιχες καμπύλες με αντίθετη φορά. Οι καμπύλες αυτές αντιστοιχούν σε συνεχή περιστροφική κίνηση του εκκρεμούς.

1.2. **Εξισώσεις 2ας τάξης ως σύστημα εξισώσεων 1ης τάξης.** Γιά να γενικεύσουμε την περίπτωση του προηγουμένου παραδείγματος, υποθέτουμε την εξίσωση 2ας τάξης

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

η οποία περιγράφει, π.χ., την κίνηση ενός μηχανικού συστήματος. Η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται από τις τιμές των $x, \dot{x}$. Γιά να λύσομε την εξίσωση χρειαζόμαστε σαν αρχικές συνθήκες τις τιμές των μεταβλητών σε κάποια χρονική στιγμή $[x(t_0), \dot{x}(t_0)]$. Αυτό δίνει την αφορμή να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση σε μιά νέα μορφή όπου τα x και $\dot{x}$ θα εμφανίζονται σαν ανεξάρτητες μεταβλητές. Δίνουμε ένα νέο όνομα στο $\dot{x}$

$$\dot{x} = y$$

και η αρχική εξίσωση γράφεται

$$\dot{y} = f(x, \dot{x}).$$

Άρα έχω ένα σύστημα εξισώσεων 1ης τάξης.

Το διάγραμμα φάσεων του συστήματος των εξισώσεων είναι το επίπεδο (x, y). Η κίνηση του συστήματος στο διάγραμμα φάσης ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f(x,y)}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y}. \tag{3}$$

Η εξίσωση ορίζει τος καμπύλες του διαγράμματος φάσης.

Παράδειγμα: Βρείτε το διάγραμμα φάσης για την εξίσωση $\ddot{x} + a \sin x = 0$. Αυτή είναι η εξίσωση για το απλό εκκρεμές. Γράφουμε

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -a \sin x.$$

Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσης δίνονται από την

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a \sin x}{y} \Rightarrow \int y\, dy = -a \int \sin x\, dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 - a \cos x = C.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου C παίρνουμε μία καμπύλη στο διάγραμμα φάσης (Σχήμα 1).

Παράδειγμα: Βρείτε το διάγραμμα φάσης για την εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Αυτή είναι η εξίσωση για τον αρμονικό ταλαντωτή. Γράφουμε

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\omega^2 x.$$

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας το οποίο βρίσκεται αν θέσουμε $\dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$. Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσης δίνονται από την

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y} \Rightarrow \int y\, dy + \int \omega^2 x\, dx = 0 \Rightarrow y^2 + \omega^2 x = C.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου C παίρνουμε μία καμπύλη, η οποία είναι έλλειψη, στο διάγραμμα φάσης. Οι ελλείψεις περιβάλλουν το σημείο ισορροπίας (0,0). (Δείτε στο σχήμα το διάγραμμα φάσης.)

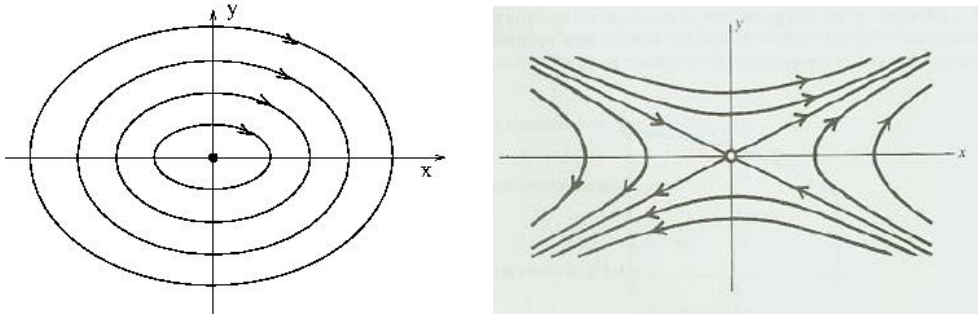
Παράδειγμα: Βρείτε το διάγραμμα φάσης για την εξίσωση $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$. Γράφουμε

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = \omega^2 x.$$

Το σύστημα έχει ένα σημείο ισορροπίας το οποίο βρίσκεται αν θέσουμε $\dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$. Οι καμπύλες του διαγράμματος φάσης δίνονται από την

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{y} \Rightarrow \int y\, dy - \int \omega^2 x\, dx = 0 \Rightarrow y^2 - \omega^2 x = C.$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου C παίρνουμε μία καμπύλη, η οποία είναι υπερβολή, στο διάγραμμα φάσης. (Δείτε στο σχήμα το διάγραμμα φάσης.)



Σχημα 2. Αριστερά: Διάγραμμα φάσης για ένα κέντρο στην αρχή των αξόνων. Δεξιά: Διάγραμμα φάσης για ένα σαγματικό σημείο στην αρχή των αξόνων. (Δεξία: από το βιβλίο Jordan & Smith, "Nonlinear Ordinary Differential Equations".)