1. Μοντελα απο την Βιολογια

1.1. **Απλά πληθυσμιακά μοντέλα.** Υποθέτομε ένα βιολογικό είδος. Θα θέλαμε να μελετήσουμε την ανάπτυξη του πληθυσμού του $N = N(t)$. Στην απλούστερη περίπτωση μπορούμε να γράψουμε ένα μοντέλο που λαμβάνει υπ' όψιν γεννήσεις και θανάτους με αντίστοιχους σταθερούς ρυθμούς αύξησης και μείωσης του πληθυσμού

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN, \quad b, d > 0.$$

Το μοντέλο δίνει αύξηση (λογω γεννήσεων) και μείωση (λόγω θανάτων) ανάλογες του πληθυσμού και αγνοεί άλλα φαινόμενα, π.χ., μετανάστευση κλπ. Η λύση της εξίσωσης είναι

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t}, \quad N_0 = N(t = 0).$$

Αν $b > d$ ο πληθυσμός αυξάνει απεριόριστα. Άρα το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να ισχύει για μεγάλο N. Διορθώνουμε το μοντέλο ως εξής

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

όπου r είναι ο ρυθμός ανάπτυξης του πληθυσμού όταν το N είναι μικρό και K είναι το μέγεθος του πληθυσμού πάνω από το οποίο αυτός επιβαρύνει υπέρμετρα το περιβάλλον. Για $N \sim K$ ο νέος νόμος είναι σημαντικά διαφορετικός από τον προηγούμενο. Η λύση της εξίσωσης είναι

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} \to K \quad (\text{όταν } t \to \infty).$$

Τα μοντέλα που περιγράφηκαν εδώ είναι συνήθως ανεπαρκή για να περιγράψουν πραγματικά συστήματα, αλλα μπορούν να βελτιωθούν και να γίνουν πιο ρεαλιστικά.

1.2. **Μοντέλο κυνηγού-θηράματος(Lotka-Volterra).** Σε μία λίμνη ζουν δύο είδη ψαριών: το Α, το οποίο ζει τρώγωντας χόρτα (τα οποία υποθέτουμε ότι υπάρχουν σε αφθονία) και το Β (κυνηγός) το οποίο τρέφεται τρώγοντας το Α (θήραμα). Χρειαζόμαστε ένα μοντέλο για την αλληλεπίδραση μεταξύ των δό ειδών.

Έστω $x(t)$ ο πληθυσμός του είδους Α και $y(t)$ ο πληθυσμός του Β. Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός του Α αυξάνει με έναν απλό νόμο όταν αυτό αφήνεται χωρίς εξωτερικές επιδράσεις. Σε χρόνο δt έχουμε αύξηση

$$ax\,\delta t, \quad a > 0$$

όπου έχει λειφθεί υπ'όψιν ένας σταθερός αριθμός γεννήσεων και θανάτων.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ρυθμός μείωσης του Α είναι ανάλογος των συναντήσεων μεταξύ Α και Β:

$$-cxy\,\delta t, \quad c > 0$$

διότι τα Α τρώγονται από τα Β.

Άρα έχω συνολική μεταβολή

$$\delta x = ax\,\delta t - cxy\,\delta t$$

το οποίο σε διαφορική μορφή γράφεται

$$\dot{x} = ax - cxy. \tag{1}$$

Τώρα υποθέτω ότι για το Β έχω περισσότερους θανάτους από ότι γεννήσεις εάν δεν υπάρχει η τροφή Α (άρα $\delta y = -by\,\delta t$), αλλά ότι επίσης υπάρχει αύξηση του Β ανάλογη με τις συναντήσεις μεταξύ Α και Β. Τελικά έχω ($b, d > 0$)

$$\dot{y} = -by + dxy. \tag{2}$$

Έχουμε να μελετήσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού (1),(2). Σημειώνουμε ότι υπάρχει ο περιορισμός $x \geq 0,\ y \geq 0$.

Σημεία ισορροπίας. Το πρώτο που θα κοιτάξουμε είναι να βρούμε τα *σημεία ισορροπίας* του συστήματος, δηλαδή εκείνα τα σημεία για τα οποία έχουμε $\dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0$:

$$ax - cxy = 0, \qquad -bx + dxy = 0,$$

τα οποία είναι τα δύο σημεία

$$(0,0) \qquad (b/d, a/c). \tag{3}$$

Το πρώτο σημείο μας λέει απλώς ότι εάν αρχικώς δεν έχουμε κανένα Α και κανένα Β τότε κανένα είδος δεν πρόκειται να δημιουργηθεί. Από την ύπαρξη του δευτέρου σημείου ισορροπίας καταλαβαίνουμε ότι υπάρχει μια κατάσταση στην οποία οι πληθυσμοί των δύο ειδών παραμένουν αμετάβλητοι στον χρόνο.

Φασικές καμπύλες. Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τις καμπύλες του διαγράμματος φάσης. Αυτά ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-b + cx)y}{(a - cy)x},$$

η οποία μπορεί να λυθεί αν διαχωρίσουμε τα x και y:

$$\int \frac{a - cy}{y}\, dy = \int \frac{-b + dx}{x}\, dx,$$

και παίρνουμε λύση

$$(cy - a\ln y) + (dx - b\ln x) = C, \tag{4}$$

όπου C είναι μιά αυθαίρετη σταθερά, η οποία παίζει τον ρόλο της παραμέτρου της οικογένειας καμπυλών του διαγράμματος φάσης.

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (4) είναι της μορφής $f(x) + g(y)$, όπου $f(x) = dx - b\ln x$ και $g(y) = cy - a\ln y$. Έχω ελάχιστο της $f(x)$ και, αντίστοίχως, της $g(x)$ γιά

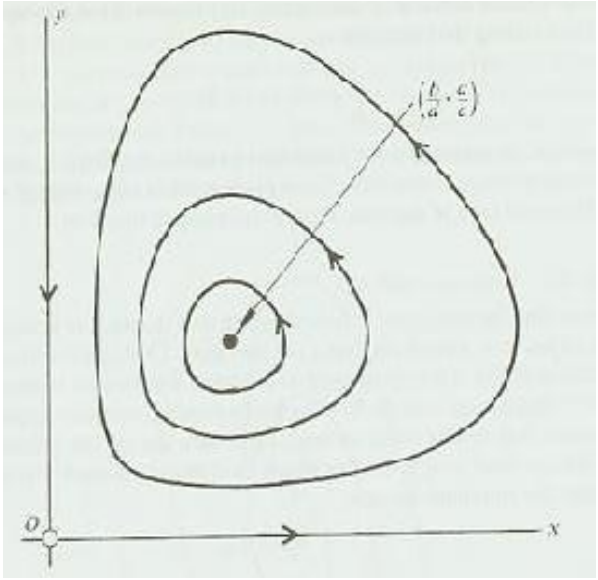
$$\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{b}{x} - d = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{d}, \qquad \frac{dg}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{a}{y} - c = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{c}. \tag{5}$$

Η συνάρτηση $f(x) + g(y)$ έχει ελάχιστο στο σημείο όπου $d[f(x) + g(y)]/dx = 0 \Rightarrow df(x)/dx = 0$ και $d[f(x) + g(y)]/dy = 0 \Rightarrow dg(y)/dy = 0$, δηλαδή στο σημείο (5).

Γύρω από το σημείο ισορροπίας (5) οι καμπύλες του διαγράμματος φάσης είναι κλειστές καμπύλες. Μπορούμε τώρα να φτιάξουμε το διάγραμμα φάσης σε σχηματική μορφή. Κάθε καμπύλη έχει μια κατεύθυνση η οποία δείχνει την αλλαγή της κατάστασης με την ροή του χρόνου. Την κατεύθυνση μπορούμε να την βρούμε, π.χ., υπολογίζοντας το πρόσημο του $\dot{x}$ σε ένα σημείο $x = b/d, y > a/c$. Αν βρούμε την κατεύθυνση σε ένα σημείο όλες οι άλλες κατευθύνσεις προκύπτουν από ιδιότητες συνέχειας.

Εφ΄ όσον οι καμπύλες είναι κλειστές οι πληθυσμοί $x(t),\ y(t)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Η χρονική στιγμή που ο πληθυσμός Β είναι μέγιστος είναι περίπου ένα τέταρτο της περιόδου μετά από την στιγμή που ο πληθυσμός Α ήταν στο μέγιστο. Όταν το Β τρώει

το A ο πληθυσμός του αυξάνει και αυτός του A μειώνεται. Αυτό έχει σαν συνέπεια να μειωθεί αργότερα το B. Ακολούθως αυξάνεται το A διότι δεν υπάρχει πολύ από το B για να το φάει και ο κύκλος ξαναρχίζει. Τέτοιες συμπεριφορέςέχουν παρατηρηθεί σε βιολογικά συστήματα.



Σχημα 1. Το διάγραμμα φάσης τοθ μοντλέλου Lotka-Volterra (από το βιβλίο Jordan & Smith, "Nonlinear Ordinary Differential Equations".)

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι, αναλόγως των αρχικών συνθηκών, κάθε σύστημα κινείται για πάντα πάνω σε μία από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος φάσης. Μόνο εάν υποθέσουμε ότι υπάρξει κάποια ξαφνική αλλαγή στις συνθήκες του περιβάλοντος, π.χ., έλλειψη φυτικής τροφής κάποια χρονιά, τότε το σύστημα θα μεταβεί σε κάποια άλλη από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος φάσης (αυτό βέβαια δεν περιγράφεται από το παρόν μοντέλο). Σε κάθε περίπτωση το σύστημα παραμένει εγκλωβισμένο σε μία από τις κλειστές καμπύλες του διαγράμματος. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μειονέκτημα του μοντέλου. Σε πολλά βιολογικά συστήματα θα περίμενε κανείς ότι το σύστημα θα είχε μια συγκεκριμένη κατάσταση ισσοροπίας (πιθανόν μία περιοδική κατάσταση) στην οποία θα επανερχόταν μετά από κάθε προσωρινή διαταραχή των εξωτερικών συνθηκών. Η συμπεριφορά του παρόντος μοντέλου πάντως είναι χρακτηριστική για όλα τα συστήματα τα οποία έχουν ένα πρώτο ολοκλήρωμα της μορφής (4).

1.3. **Μοντέλα ανταγωνισμού δύο ειδών.** Μπορούμε να εισάγουμε την, λεγόμενη, λογιστική ανάπτυξη στο μοντέλο Lotka-Volterra οπότε αυτό γίνεται

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12}\frac{N_2}{K_1}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21}\frac{N_1}{K_2}\right)$$

Αυτό θεωρείται ότι δίνει αποτελέσματα πιο κοντά στην πραγματικότητα.

1.4. **Μοντέλο επιδημιών.** Θεωρούμε την εξάπλωση επιδημίας σε έναν σταθερό πληθυσμό. Σε δεδομένη στιγμή t έχουμε
$x(t)$: οι υγιείς οι οποίοι δεν έχουν αρρωστήσει και άρα είναι δυνατόν να αρρωστήσουν.
$y(t)$: οι άρρωστοι.
$z(t)$: αυτοί που έχουν αναρρώσει και άρα έχουν ανοσία.

Υποθέτουμε τώρα ένα σταθερό ρυθμό επαφών μεταξύ των υγειών και των αρρώστων εκ των οποίων ένα ποσοστό οδηγεί στην μετάδοση της ασθένειας. Άρα σε χρόνο δt έχω

$$\delta x = -\beta xy\,\delta t$$

νέους αρρώστους.

Υποθέτω επίσης ότι οι άρρωστοι αναρρώνουν με ρυθμό γ, άρα

$$\delta y = \beta xy\,\delta t - \gamma y\,\delta t.$$

Η αύξηση του πληθυσμού αυτών με ανοσία είναι

$$\delta z = \gamma y\,\delta t.$$

Σε διαφορική μορφή οι παραπάνω σχέσεις δίνουν το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\beta xy \\ \dot{y} &= \beta xy - \gamma y \\ \dot{z} &= \gamma y. \end{aligned} \tag{6}$$

Γιά το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}(x+y+z) = 0 \Rightarrow x+y+z = N,$$

ώστε λέμε ότι έχουμε ένα ολοκλήρωμα των εξισώσεων, που εδώ εκφράζει το γεγονός ότι ο συνολικός πληθυσμός N είναι σταθερός. Παρατηρούμε ότι η τρίτη εξίσωση του συστήματος προκύπτει από τις δύο πρώτες αν χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα.

Γιά το διάγραμμα φάσης στο επίπεδο (x, y) έχουμε
(α) *Σημεία ισορροπίας:* Θέτουμε $\dot{x} = 0 = \dot{y} \Rightarrow$ και βρίσκουμε

$$xy = 0, \quad (\beta x - \gamma)y = 0 \Rightarrow y = 0, \quad x > 0, \tag{7}$$

δηλαδή όλα τα σημεία του άξονα x (για $x > 0$) είναι σημεία ισορροπίας.
(β) Οι εξίσωση των καμπυλών του διαγράμματος φάσης:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta xy - \gamma y}{-\beta xy} = -1 + \frac{\gamma}{\beta}\frac{1}{x} \Rightarrow dy = \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta}\frac{1}{x}\right)\,dx \Rightarrow y = \frac{\gamma}{\beta}\ln x - x + C \tag{8}$$

όπου το C είναι μιά σταθερά (η παράμετρος της οικογένειας των καμπυλών). Επειδή τώρα

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -1 + \frac{\gamma}{\beta}\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{\gamma}{\beta},$$

ο αριθμός των αρρώστων y είναι μέγιστος (για μιά συγκεκριμένη καμπύλη) όταν ο αριθμός των υγιών είναι $x = \gamma/\beta$.