1. Συστηματα δυο εξισωσεων

Έχουμε δει πώς στην μηχανική μια εξίσωση δευτέρας τάξης μπορεί να γραφει σαν δύο εξισώσεις πρώτου βαθμού. Συστήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού, προκύπτουν επίσης σαν μοντέλα συστημάτων στην μηχανική, στην βιολογία και αλλού. Τα συστήματα αυτά είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x,y) \\ \dot{y} &= Y(x,y). \end{aligned}$$

Αυτά που μας ενδιαφέρει να ξέρουμε σε τέτοια συστήματα είναι
(α) Τα σημεία ισορροπίας, δηλαδή τα σημεία στα οποία

$$X(x,y)=0, \qquad Y(x,y)=0.$$

(β) Το διάγραμμα φάσης, οι καμπύλες του οποίου δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}.$$

(γ) Οι λύσεις του συστήματος

$$x=x(t), \qquad y=y(t).$$

2. Συστηματα γραμμικων εξισωσεων

Η μελέτη συστημάτων εξισώσεων αρχίζει από τα πιό απλά συστήματα που είναι τα γραμμικά. Εάν έχω μια μεταβλητή η οποία αυξάνεται, αυτή μπορεί να περιγραφεί ως

$$\dot{x}=ax \Rightarrow x(t)=c\,e^{at},$$

το οποίο έχουμε δει ότι είναι ένα απλό μοντέλο για αύξηση πληθυσμού.

2.1. **Συστήματα με δύο μεταβλητές.** Ένα γραμμικό σύστημα με δύο μεταβλητές έχει την γενική μορφή

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax+by \\ \dot{y} &= cx+dy. \end{aligned}$$

Το σημείο ισορροπίας βρίσκεται από τις σχέσεις $ax+by=0,\ cx+dy=0 \Rightarrow x=0,\ y=0$. Βρίσκουμε λύση δοκιμάζοντας την μορφή

$$x=r\,e^{\lambda t}, \quad y=s\,e^{\lambda t},$$

όπου r,s,λ είναι σταθερές. Αντικατάσταση στο σύστημα εξισώσεων (1) δίνει τις εξισώσεις

$$(a-\lambda)r+bs=0, \qquad cr+(d-\lambda)s=0. \tag{1}$$

Θεωρούμε ως αγνώστους τους r,s και ζητάμε να μηδενίζεται η ορίζουσα του συστήματος, ώστε εξάγουμε την συνθήκη γιά το λ

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0,$$

η οποία λέγεται *χαρακτηριστική εξίσωση* του συστήματος και στην περίπτωση μας έχει δύο λύσεις λ_1,λ_2. Για κάθε τιμή του λ οι εξισώσεις (1) δίνουν τη σχέση μεταξύ r και s.

Η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= r_1\, e^{\lambda_1 t} + r_2\, e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) &= s_1\, e^{\lambda_1 t} + s_2\, e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Θα επαναλάβουμε τώρα την παραπάνω διαδικασία σε μια διαφορετική γλώσσα. Το γραμμικό σύστημα (1) γράφεται στην μορφή

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]. \tag{2}$$

Τα εκθετικά $\lambda_{1,2}$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα 2×2 του συστήματος και οι λύσεις γιά τα (r, s) είναι τα ιδιοδιανύσματα του.

Παράδειγμα. (σάγμα) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε λύση δοκιμάζοντας την μορφή

$$x_1 = r\, e^{\lambda t}, \quad x_2 = s\, e^{\lambda t}.$$

Αντικαθιστούμε στο σύστημα εξισώσεων και βρίσκουμε

$$(\lambda + 1)\, r + 3\, s = 0, \qquad (\lambda - 2)\, s = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2.$$

Για $\lambda = -1$ βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $(r, s) = (1, 0)$ και γιά $\lambda = 2$ βρίσκουμε ιδιοδιάνυσμα $(1, -1)$.

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t} \\ x_2(t) &= -c_2\, e^{2t}. \end{aligned}$$

2.2. **Διαγωνοποίηση.** Το γραμμικό σύστημα που μελετάμε (1) μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},$$

όπου A είναι ο πίνακας 2×2 των συντελεστών. Αυτόν τον πίνακα πρέπει τώρα να μελετήσουμε. Ανακαλούμε ένα σημαντικό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας.

Θεώρημα: Εάν οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ενός πίνακα A διάστασεων $n \times n$ είναι πραγματικές και διάκριτες, τότε οποιοδήποτε σύνολο των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι βάση του $\boldsymbol{R}^n$, ο πίνακας $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ είναι αντιστρέψιμος και

$$P^{-1} A P = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

Για να βρούμε **την γενική λύση** του γραμμικού συστήματος ορίζουμε ένα νέο διάνυσμα μεταβλητών

$$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x},$$

γιά το οποίο έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{y}} = P^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{y}.$$

Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\boldsymbol{y}.$$

Η γενική λύση είναι

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]\, \boldsymbol{y}(0).$$

Στις αρχικές μεταβλητές έχω

$$\boldsymbol{x}(t) = P\,\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}]P^{-1}\boldsymbol{x}(0).$$

Παρατήρηση: Για έναν 2×2 πίνακα P ο αντίστροφος P^{-1} είναι

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

όπου $\Delta = ad - bc$ η ορίζουσα.

Παράδειγμα. (σαγματικό σημείο) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας είναι

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ και δύο αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= 2y_2 \end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$. Η γενική λύση του είναι $y_1(t) = c_1 e^{-t}$, $y_2(t) = c_2 e^{2t}$ ή σε άλλη μορφή

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\, \boldsymbol{y}(0).$$

Τελικά έχω

$$\boldsymbol{x}(t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1}\, \boldsymbol{x}(0) \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_1(0)e^{-t} + x_2(0)(e^{-t} - e^{2t}) \\ x_2(t) = x_2(0)e^{2t} \end{cases}$$

Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα φάσης στα επίπεδα (y_1, y_2) και (x_1, x_2). Έχουμε ένα *σαγματικό σημείο.*

Σχέδιο διαγράμματος φάσης. Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα φάσης (στο επίπεδο (x_1, x_2)) παρατηρούμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα $[r(1,0)$ και $r(-1,1)]$ μένουν αναλλοίωτες από τις εξισώσεις κίνησης. Η φορά της κίνησης είναι προς την αρχή των αξόνων για την ευθεία $r(1,0)$ (διότι $\lambda = -1 < 0$ και άρα το $\boldsymbol{x}$ μειώνεται εκθετικά) ενώ η κίνηση στην ευθεία $r(-1,1)$ έχουμε απομάκρυνση από την αρχή των αξόνων (διότι $\lambda = 2 > 0$ και άρα το $\boldsymbol{x}$ αυξάνεται εκθετικά). Όλες οι υπόλοιπες καμπύλες του διαγράμματος σχεδιάζονται εάν σκεφτούμε ότι πρέπει να υπάρχει συνέχεια με τις δύο ευθείες που προαναφέρθηκαν.