Παράδειγμα. (κόμβος) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - 4x_2 \end{aligned}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

με λυσεις $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$. Ιδιοδιανύσματα $(2,3),\ (1,1)$.

Η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2c_1\, e^{-2t} + c_2\, e^{-t}, \\ x_2(t) &= 3c_1\, e^{-2t} + c_2\, e^{-t}. \end{aligned}$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα φάσης στο επίπεδο (x_1, x_2). Έχουμε έναν ευσταθή *κόμβο*.

1.1. Μιγαδικές ιδιοτιμές. .

Θεώρημα: Εάν ένας πραγματικός πίνακας A διαστάσεων $2n \times 2n$ έχει διάκριτες ιδιοτιμές $\lambda_j = a_j + ib_j$ και $\lambda_j^* = a_j - ib_j$ και ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{u}_j + i\boldsymbol{v}_j,\ \boldsymbol{w}_j^* = \boldsymbol{u}_j - i\boldsymbol{v}_j$, τότε $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι βάση του $\boldsymbol{R}^{2n}$, ο πίνακας $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_n]$ είναι αντιστρέψιμος και

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}.$$

Ώστε εάν ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα μεταβλητών $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$, έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{y}} = P^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{y} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Άρα ισχύει

$$\boldsymbol{x}(t) = P \operatorname{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x}(0).$$

Σύστημα 2×2 με μιγαδικές ιδιοτιμές.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= ay_1 - by_2 \\ \dot{y}_2 &= by_1 + ay_2 \end{aligned}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - a)^2 + b^2 = 0, \Rightarrow \lambda = a \pm ib$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(y_1, y_2) = (1, \mp i)$. Άρα

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{(a+ib)t} + c_2 e^{(a-ib)t} = e^{at}[c_1 e^{ibt} + c_2 e^{-ibt}] \\ y_2(t) &= -ic_1 e^{(a+ib)t} + ic_2 e^{(a-ib)t} = e^{at}\frac{1}{i}[c_1 e^{ibt} - c_2 e^{-ibt}] \end{aligned}$$

Εκλέγω $c_2^* = c_1 \equiv r_1/2 + ir_2/2$ $(r_1, r_2 \in R)$, ώστε

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{at} 2\mathrm{Re}[c_1 e^{ibt}] = e^{at}[r_1 \cos bt - r_2 \sin bt] \\ y_2(t) &= e^{at} 2\mathrm{Im}[c_1 e^{ibt}] = e^{at}[r_1 \sin bt + r_2 \cos bt]. \end{aligned}$$

Τελικά μπορώ να γράψω

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} \boldsymbol{y}(0).$$

Πολικές συνεταγμένες: Βρείτε την γενική λύση του συστήματος

$$\dot{y}_1 = a y_1 - b y_2, \qquad \dot{y}_2 = b y_1 + a y_2.$$

Θέτουμε $z = y_1 + i y_2$ και βρίσκουμε

$$\dot{z} = (a + ib)\, z$$

και γράφουμε $z = r(t) e^{i\theta(t)}$, οπότε παίρνουμε

$$\dot{r} = ar, \qquad \dot{\theta} = b \Rightarrow r = r_0 e^{at}, \;\; \theta = bt + \theta_0.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι στο διάγραμμα φάσης έχουμε ένα σπειροειδές σημείο. Είναι ευσταθής για $a < 0$ και ασταθής για $a > 0$.

Κέντρο: Στην περίπτωση $a = 0$ έχουμε κλειστές τροχιές και λέμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι *κέντρο*.

Για οποιοδήποτε άλλο σύστημα με μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a x_1 + b x_2 \\ \dot{x}_2 &= c x_1 + d x_2 \end{aligned}$$

γράφω $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ και έχω λύση

$$\boldsymbol{x}(t) = P e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} P^{-1} \boldsymbol{x}(0).$$

Παράδειγμα. (σπειροειδές σημείο) Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 = -1 \pm i$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(x_1, x_2) = (1, -2 \pm i)$. Άρα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ τότε βρίσκουμε $\dot{\boldsymbol{y}} = P^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = P^{-1}A\boldsymbol{x} = P^{-1}AP\boldsymbol{y}$. Από το παραπάνω θεώρημα (ή από κατ' ευθείαν υπολογισμό του $P^{-1}AP$) έχω

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα (με $a=-1, b=1$) συνάγουμε

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \boldsymbol{y}(0)$$

Τελικά

$$\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t) = Pe^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \boldsymbol{y}(0) = Pe^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x}(0) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}\left[x_1(0)\cos t + (2x_1(0)+x_2(0))\sin t\right] \\ x_2(t) &= e^{-t}\left[x_2(0)\cos t - (5x_1(0)+2x_2(0))\sin t\right] \end{aligned}$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα φάσης στο επίπεδο (x_1, x_2). Έχουμε ένα ευσταθές *σπειροειδές σημείο.*

Παράδειγμα: (σπειροειδές σημείο) Βρείτε την γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 - 3x_2. \end{aligned}$$

Η χαρακτηριστικη εξίσωση είναι

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i,$$

όπου $\lambda_2 = \lambda_1^*$. Για $\lambda = \lambda_1$ και $\lambda = \lambda_2$ βρίσκω αντιστοίχως

$$s_1 = (-2+i)r_1, \qquad s_2 = (-2-i)r_2.$$

Άρα η γενική λύση γράφεται

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r_1\, e^{(-1+i)t} + r_2\, e^{(-1-i)t}, \\ x_2(t) &= r_1(-2+i)\, e^{(-1+i)t} + r_2(-2-i)\, e^{(-1-i)t}. \end{aligned}$$

Αν ζητάμε πραγματικές λύσεις τότε πρέπει να θέσουμε $r_2 = r_1^*$ και γραφοντας $r_1 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}ic_2$ παίρνω

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}(c_1\cos t - c_2\sin t), \\ x_2(t) &= -e^{-t}[(2c_1+c_2)\cos t + (c_1-2c_2)\sin t]. \end{aligned}$$

1.2. **Διάγραμμα σημείων ισορροπίας.** Έστω το γενικό σύστημα

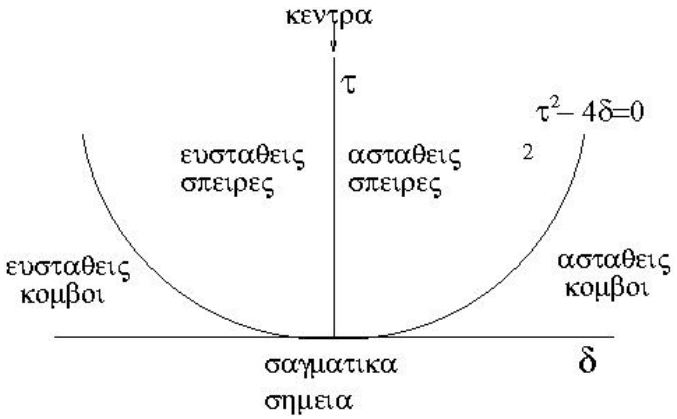
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned}$$

Θέτουμε $\delta = \det A = ad - bc$ και $\tau = \mathrm{trace} A = a + d$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$$

(α) Γιά $\delta < 0$ έχουμε σαγματικό σημείο.
(β) Γιά $\delta > 0$ και $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ έχουμε κόμβο.
Είναι ευσταθής γιά $\tau < 0$ και ασταθής γιά $\tau > 0$.
(γ) Γιά $\delta > 0$ και $\tau^2 - 4\delta < 0$ έχουμε σπειροειδές σημείο (γιά $\tau \neq 0$).

Είναι ευσταθές γιά $\tau < 0$ και ασταθές γιά $\tau > 0$.
(δ) Γιά $\delta > 0$ και $\tau = 0$ έχουμε κέντρο.



Σχημα 1. Διάγραμμα σημείων ισορροπίας στο χώρο των παραμέτρων.