1. Ευσταθεια σημειων ισορροπιας

Θεώρημα: Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος τότε Για κάθε αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$, $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = 0$ και επίσης, αν $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$, $\lim_{t\to-\infty} |\boldsymbol{x}(t)| = \infty$.

Θεώρημα: Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν θετικό πραγματικό μέρος τότε Για κάθε αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$, $\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = 0$ και επίσης, αν $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$, $\lim_{t\to\infty} |\boldsymbol{x}(t)| = \infty$.

Ορισμός: Έστω $\lambda_j = a_j + ib_j$ οι ιδιοτιμές του πίνακα ενός γραμμικού συστήματος και $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{u}_j + i\boldsymbol{v}_j$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε ονομάζουμε τους χώρους

$$E^s = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \,|\, a_j < 0\}$$

$$E^u = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \,|\, a_j > 0\}$$

$$E^c = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \,|\, a_j = 0\}$$

ευσταθή, ασταθή και κεντρικό υπόχωρο του συστήματος αντίστοιχα.

Παράδειγμα: Για ένα σύστημα δύο εξισώσεων με ένα σαγματικό σημείο ο ευσταθής και ο ασταθής υπόχωρος είναι ο καθένας μία ευθεία.

Παράδειγμα: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ και ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{w}_{1,2} = [0,1,0]^T \pm i[1,0,0]^T$ και επίσης $\lambda_3 = 3$ με ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{u}_3 = [0,0,1]^T$. Ο ευσταθής υπόχωρος E^s είναι το επίπεδο (x_1, x_2) και ο ασταθής υπόχωρος E^u είναι ο άξονας x_3.

Θεώρημα: Οι υπόχωροι E^s, E^u, E^c ενός πίνακα $n \times n$ μένουν αναλλοίωτοι από τις αντίστοιχες εξισώσεις. Επίσης,

$$\boldsymbol{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c.$$

Ορισμός: Ένα σημείο ισορροπίας $\boldsymbol{x}_0$ λέγεται ευσταθές αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ έχουμε

$$\boldsymbol{x}(t) \in N_\epsilon(\boldsymbol{x}_0).$$

Το σημείο ισορροπίας λέγεται ασταθές εάν δεν είναι ευσταθές.

Παραδείγματα: Ένα σαγματικό σημείο είναι ασταθές.
Ένας κόμβος μπορεί να είναι ασταθής (θετικές ιδιοτιμές) ή ευσταθής (αρνητικές ιδιοτιμές).
Ένα σπειροειδές σημείο μπορεί να είναι ασταθές (ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος) ή ευσταθές (ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος).

Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται ασυμπτοτικά ευσταθές αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\boldsymbol{x} \in N_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = 0.$$

Παραδείγματα: Εάν ένα σπειροειδές σημείο είναι ευσταθές τότε είναι ασυμπτοτικά ευσταθές. Ένα κέντρο είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτοτικά ευσταθές.

2. Μη γραμμικα συστηματα

Έστω το μη γραμμικό σύστημα n εξισώσεων

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

Θεωρούμε ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος $\boldsymbol{x}_0$ και τον ιακωβιανό πίνακα υπολογισμένο στο σημείο ισορροπίας (υποθέτουμε σύστημα δύο εξισώσεων)

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \left[\begin{array}{cc} df_1/dx_1 & df_1/dx_2 \\ df_2/dx_1 & df_2/dx_2 \end{array} \right]_{\boldsymbol{x}_0}.$$

Θα δούμε ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{\xi}, \qquad \boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \tag{2}$$

διατηρεί, κοντά στο σημείο ισορροπίας $\boldsymbol{x}_0$ την μορφή του διαγράμματος φάσης του μη γραμμικού συστήματος (εκτός ειδικών περιπτώσεων).

Θεώρημα (The stable manifold theorem). Έστω E ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\boldsymbol{R}^n$ που περιέχει την αρχή των αξόνων, επίσης $\boldsymbol{f} \in C^1(E)$, όπου $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ και ότι $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})$ έχει k ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και $n-k$ ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος. Τότε υπάρχει μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα S διαστάσεως k η οποία είναι εφαπτόμενη στον ευσταθή υπόχωρο E^s του γραμμικοποιημένου συστήματος (2) στο σημείο $\boldsymbol{0}$ τέτοια ώστε γιά κάθε αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}_0 \in S$

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}.$$

Επίσης, υπάρχει μία πολλαπλότητα U διαστάσεως $n-k$ εφαπτόμενη στον ασταθή υπόχωρο E^u του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σημείο $\boldsymbol{0}$ τέτοια ώστε γιά κάθε αρχική συνθήκη $\boldsymbol{x}_0 \in U$

$$\lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}.$$

Οι πολλαπλότητες S και U είναι αναλλοίωτες στις εξισώσεις.

Γενικότερα, αν ένα σημείο ισορροπίας έχει όλες τις ιδιοτιμές με μη-μηδενικό πραγματικό μέρος (τότε λέγεται *υπερβολικό σημείο ισορροπίας*), τότε η συμπεριφορά του μη γραμμικού συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την συμπεριφορά του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Παράδειγμα: Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης του μη γραμμικού συστήματος

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \qquad \dot{x}_2 = 1 - x_1 x_2.$$

Θέτουμε $f_1 = x_1 - x_2,\ f2 = 1 - x_1 x_2$. Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται ως

$$f_1 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

$$f_2 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1 = x_2.$$

Άρα έχουμε τα σημεία $(-1,-1)$ και $(1,1)$.

Ο γραμμικοποιημένος πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} df_1/dx_1 & df_1/dx_2 \\ df_2/dx_1 & df_2/dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}.$$

Για το σημείο $(-1,-1)$ ορίζω $\xi_1 = x_1 + 1$, $\xi_2 = x_2 + 1$ και έχουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα

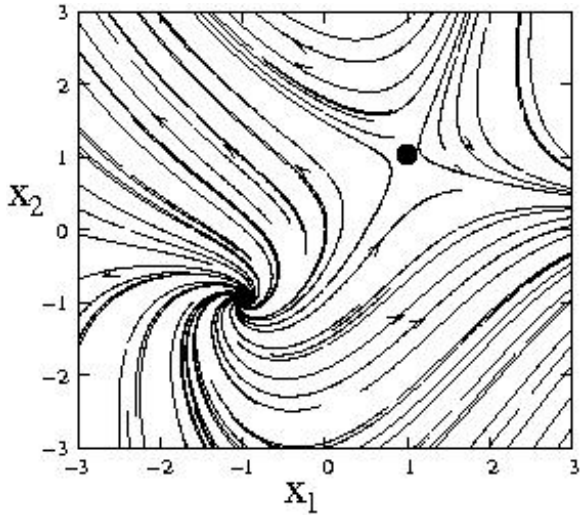
$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, άρα το σημείο είναι ένα ασταθές σπειροειδές σημείο. Η φορά περιστροφής της σπείρας μπορεί να βρεθεί ως εξής. Στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις θεωρούμε, π.χ., $\xi_2 = 0, \xi_1 > 0$ (δηλ., είμαστε στον θετικό άξονα x_1) και βρίσκουμε $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 > 0$, άρα η κίνηση επάνω στην σπείρα είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογίου.

Για το σημείο $(1,1)$ ορίζουμε $\xi_1 = x_1 - 1$, $\xi_2 = x_2 - 1$ και έχουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, άρα το σημείο είναι ένα σαγματικό σημείο. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(1, 1 \mp \sqrt{2})$ και ορίζουν αντίστοιχα τον ασταθή και ευσταθή υπόχωρο.



Σχημα 1. Διάγραμμα φάσης γιά το μη γραμμικό πρόβλημα του παραπάνω παραδείγματος. Έχουμε ένα ασταθές σπειροειδές σημείο και ένα σαγματικό σημείο (σημειώνονται μαύρους κύκλους στο σχήμα). Έχει σημειωθεί με βέλη η φορά ορισμένων καμπυλών.