ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Αριστειδης Κοντογεωργης

Ονομάζομαι Αριστείδης Κοντογεώργης. Γεννήθηκα στην Αθήνα στις 29 Απριλίου 1972.

Σπουδες-Επαγγελματικη Εμπειρια

1990-1993 **Ανώτατη Εκπαίδευση.** Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης. Αν και οι προπτυχιακές σπουδές διαρκούν 4 έτη, είχα συγκεντρώσει τις διδακτικές μονάδες που ο κανονισμός του τμήματος προβλέπει σε τρία έτη. Απόφοιτησα με βαθμό 9.11/10 πρώτος στην σχολή θετικών επιστημών.

1993-1994 **Μεταπτυχιακές σπουδές.** Παρακολούθησα το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του πανεπιστημίου Κρήτης. Το δεύτερο εξάμηνο του 1993-1994 παρακολούθησα το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του πανεπιστήμιου του Manchester βάσει του κοινοτικού προγράμματος ανταλλαγής φοιτητών ERASMUS. Στο τέλος του 1994 συμπλήρωσα τις απαιτήσεις του τμήματος μαθηματικών του Παν. Κρήτης για μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης στα θεωρητικά μαθηματικά με την συγγραφή εργασίας "Ημιευσταθείς ελλειπτικές καμπύλες και το τελευταίο θεώρημα του Fermat, υπό την επίβλεψη του καθ. Γ. Αντωνιάδη.

1995-1998 **Διδακτορική Διατριβή.** Τον Ιανουάριο του 1995 μέχρι τον Ιούλιο του 1998 εργάστηκα πάνω στην διδακτορική μου διατριβή με θέμα "Αυτομορφισμοί αλγεβρικών καμπύλων'', υπό την επίβλεψη του καθ. Γ. Αντωνιάδη.

1998-1999 **Μεταδιδακτορικές Σπουδές.** Από τον Σεπτέμβριο του 1998 μέχρι τον Αύγουστο του 1999 εργάστηκα ως επισκέπτης ερευνητής στο ινστιτούτο Max-Planck für Mathematik στην Βόννη.

1999-2000 **Στρατιωτική Θητεία.** Από τον Σεπτέμβριο του 1999 μέχρι τον Σεπτέμβριο του 2000 εκπλήρωσα τις στρατιωτικές μου υποχρεώσεις.

2001 **Ακαδημαϊκή Διδασκαλία** Επισκέπτης στο Μαθηματικό τμήμα του Παν. Κρήτης βάσει του Π.Δ. 407/80, διδασκαλία του μεταπτυχιακού μαθήματος "Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών''.

Υποτροφιες

Κατά την διάρκεια των σπουδών μου έλαβα τις παρακάτω υποτροφίες:

- Βραβείο Πηχωρίδη (1993)
- Βραβείο Δρετάκη (1994)
- Βραβείο Digital Research (στην μνήμη των Στεφ. Πνευματικού και Β. Ξανθόπουλου) (1995)

Κατά την διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών είχα βραβευθεί από το τμήμα δύο φορές με βραβείο καλής επίδοσης, ενώ είχα λάβει σε κάθε έτος σπουδών το βραβείο του ΙΚΥ, που αφορά τον φοιτητή με την υψηλότερη βαθμολογία. Κατά το πρώτο έτος των μεταπτυχιακών μου σπουδών είχα οικονομική υποστήριξη από το

Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας ενώ τα τελευταία τρία έτη ήμουν υπότροφος του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών. Επίσεις κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών χρηματοδοτήθηκα από το ερευνητικό πρόγραμμα ΠΕΝΕΔ της γραμματείας έρευνας και τεχνολογίας.

Συμμετοχη σε Συνεδρια

- Ecole d' Automne "Introduction à la Geometrie Algebrique" Γενεύη, 8-15 Σεπτεμβρίου 1995
- EuroConference on Algebraic Geometry, University of Warwick, 15-20 Ιουλίου 1996
- Πρώτο Πανελλήνιο Συνέδριο Άλγεβρας, Πανεπιστήμιο Αθηνών 27-28 Σεπτεμβρίου 1996
- Representation Theory of Algebraic Groups and related Finite Groups, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, 6-11 Ιανουαρίου 1997
- Europe Research Conference on "Number Theory and Arithmetical Geometry", San Feliu de Guixols, Βαρκελώνη, 24-29 Οκτωβρίου 1997
- EuroConference on Galois Representations in Arithmetic Geometry Ακαδημαϊκό χωρίο Ανωγείων Κρήτης, 19-25 Ιούλιου 1998
- Arbeitstagung, Βόννη Ιούνιος 1999.
- 5ο Πανελλήνιο συνέδριο Γεωμετρίας, Θεσσαλονίκη 31/5/-2/6 2001

Επιστημονικες Εργασιες-Δημοσιευσεις

Έχω δημοσιεύσει τις παρακάτω εργασίες από τις οποίες οι (2),(3),(5),(6) έχουν γίνει δεκτές σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές.

(1) Ημιευσταθείς Ελλειπτικές καμπύλες και το τελευταίο θεώρημα του Fermat
(2) The group of Automorphisms of the Function Fields of the Curves $x^n + y^m + 1 = 0$ J. of Number Theory 72, p.110-136 (1998)
(3) The group of automorphisms of function fields of the curves $y^n = f(x)$. J. of Algebra Volume 216 Number 2, June 15, 1999, p. 665-706 July 1999
(4) Ομάδες αυτομορφισμών αλγεβρικών καμπύλων *Διδακτορική διατριβή* Ηράκλειο 1998
(5) Discontinuous groups in positive characteristic and automorphisms of Mumford curves. Από κοινού εργασία με τους Fumiharo Kato και Gunther Cornelissen. Math. Annalen 320 (2001) 1, 55-85
(6) The group of Automorphisms of Fermat like varieties, (έχει γίνει δεκτό στο Manuscripta Mathematica)
(7) Actions of Galois Groups on invariants of Number Fields

Αναλυση Εργασιων.

Η πρώτη εργασία δεν έχει ερευνητικό κομμάτι. Αποτελεί παρουσίαση των αποτελεσμάτων που οδήγησαν στην απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, και αποτελεί την εργασία μου για το μεταπτυχιακό δίπλωμα ειδίκευσης.

Οι εργασίες (2) και (3) αποτελούν το δημοσιευμένο κομμάτι της διδακτορικής μου διατριβής.

Στην (2) μελετώ την ομάδα των αυτομορφισμών των αλγεβρικών καμπύλων της μορφής $x^n + y^m + 1 = 0$, πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής $p \geq 0$, τέτοιο ώστε το p δεν διαιρεί τα m, n, όπου $m > n \geq 2$, $n = 4, m = 3$. Η περίπτωση $m = n$ μελετήθηκε από τον H.W Leopoldt [1] στην γενική χαρακτηριστική καθώς και από τον Παύλο Τζερμιά [2] στην χαρακτηριστική 0. Οι εν λόγω καμπύλες δέχονται σαν υποομάδες της ομάδας αυτομορφισμών το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, και η δράση δίνεται μέσω πολλαπλασιασμών με n, m ρίζες της μονάδας. Τα προβολικά μοντέλα των καμπύλων αυτών παρουσιάζουν, για ορισμένες τιμές των n, m ιδιομορφίες στο άπειρο. Προκειμένου να τις αποφύγουμε, μελετάμε το σώμα συναρτήσεων των καμπύλων έστω $F_{n,m}$. Μελετώντας την διακλάδωση στις δύο επεκτάσεις Galois $F_{n,m}/F_{n,m}^{\mathbb{Z}_n}$ και $F_{n,m}/F_{n,m}^{\mathbb{Z}_m}$ υπολογίζουμε μία βάση ολόμορφων διαφορικών και την δομή των ημιομάδων Weierstrass σε συγκεκριμένα σημεία-θέσεις της καμπύλης. Οι ομάδες αυτομορφισμών είναι γνωστό ότι σέβονται τις ημιομάδες Weierstrass. Αυτό μας επιτρέπει να περιορίσουμε τις τροχιές των σημείων. Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει ύστερα από μία τοπική μελέτη των ομάδων ισοτροπίας των σημείων με περιορισμένη τροχιά. Συγκεκριμένα το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας είναι:

Η ομάδα αυτομορφισμών $G_{n,m}$ των σωμάτων συναρτήσεων $F_{n,m}$, είναι το $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ αν το m δεν διαιρεί το n. Στην περίπτωση που το $m \mid n$ αν το $n-1$ δεν είναι δύναμη της χαρακτηριστικής τότε η ομάδα αυτομορφισμών δέχεται μία παράσταση με γεννήτωρες και σχέσεις ως εξής:

$$G_{n,m} = \langle \sigma, \tau | \sigma^{2m} = 1, \tau^n = 1, \sigma^3\tau^{-1} = \tau\sigma, \sigma^2\tau = \tau\sigma^2 \rangle.$$

Τέλος αν $m \mid n$ και επιπλέον $n - 1 = p^h$, τότε η $G_{n,m}$ δίνεται μέσω μίας κεντρικής επέκτασης

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow G_{n,m} \longrightarrow PGL(2, p^h) \longrightarrow 1,$$

η δε κλάση συνομολογίας που αντιστοιχεί στην παραπάνω επέκταση υπολογίζεται μέσω του περιορισμού στην προηγούμενη περίπτωση.

Στην εργασία υπαριθμόν (3) μελετάμε αυτομορφισμούς των καμπύλων που ορίζονται από μία εξίσωση της μορφής: $y^n = f(x)$. Οι παραπάνω καμπύλες δέχονται σαν ομάδα αυτομορφισμών την κυκλική ομάδα C_n τάξεως n ή οποία παράγεται από το στοιχείο $y \to \zeta y$ όπου ζ είναι μία πρωταρχική ρίζα της μονάδας. Αποδεικνύουμε ότι η C_n κάτω από κατάληλες συνθήκες είναι κανονική υποομάδα της πλήρους ομάδας αυτομορφισμών G, οπότε το πρόβλημα προσδιορισμού της δομής της ομάδας αυτομορφισμών ανάγεται σε επεκτάσεων ομάδων με αβελιανό πυρήνα, η δε ομάδα G προσδιορίζεται μέσω της μικράς ακριβούς ακολουθίας

$$1 \longrightarrow C_n \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1,$$

---

[1] H.W. Leopoldt, *Über die Automorphismengruppe des Fermatkörpers*, J. Number Theory **56** 1996, 256-282

[2] P.Tzermias, *The group of automorphisms of the Fermat curve*, J. Number Theory **53** (1995), 173-178

όπου η ομάδα H είναι μία πεπερασμένη υποομάδα της ομάδας $PGL(2,k)$. Οι δυνατές πεπερασμένες υποομάδες της $PGL(2,k)$ προσδιορίστηκαν από τους Valentini-Madan [3]. Έτσι για κάθε πιθανή υποομάδα H, προσδιορίζουμε την κλάση συνομολογίας $\alpha \in H^2(H, C_n)$ βάσει του τύπου διακλάδωσης του διακλαδισμένου καλύμματος $C \to \mathbb{P}^1$. Αντιστρόφως δείχνουμε ότι όλες οι δυνατές ομάδες μπορούν να εμφανιστούν γράφοντας οιοικογένειες εξισώσεων οι οποίες τις υλοποιούν.

Η διδακτορική μου διατριβή (4) περιέχει δύο ερευνητικές εργασίες που δεν έχω δημοσιεύσει. Συγκεκριμένα στο τέταρτο κεφάλαιο επεκτείνω ένα αποτέλεσμα του J.P. Serre που υπολόγισε τις ομάδες αυτομορφισμών των modular καμπύλων $X(p)$ για p πρώτο. Το αποτέλεσμα του J.P. Serre, επεκτείνεται στην περίπτωση των καμπύλων $X(N)$, για κάθε φυσικό N. Η μέθοδος που χρησιμοποιώ είναι μία παραλαγή της μεθόδου του Serre και βασίζεται στον τύπο των Riemann-Hurwitz. Το αποτέλεσμα επεκτείνεται στις Drinfeld modular curves στην εργασία (5). Στο τελευταίο κεφάλαιο της διδακτορικής διατριβής, υπολογίζω τις ομάδες αυτομορφισμών των υπερεπιφανειών Fermat. Αποδεικνύω αρχικά ότι κάθε αυτομορφισμός των υπερεπιφανειών Fermat είναι περιορισμός ενός αυτομορφισμού του περιβάλλοντος προβολικού χώρου και στην συνέχεια υπολογίζουμε τους αυτομορφισμούς που διατηρούν την εξίσωση Fermat αναλλοίωτη. Το αποτέλεσμα αυτό περιέχεται σε μία ποιό γενική μορφή στην εργασία υπαριθμόν (6)

Στην εργασία (5), η οποία είναι προϊόν συνεργασίας με τους F. Kato και G. Cornelissen, μελετούμε τις ομάδες αυτομορφισμών των καμπύλων που δέχονται p-αδική uniformization κατά Mumford.

Από τον περασμένο αιώνα ήταν γνωστό ότι η ομάδα αυτομορφισμών μίας ανάγωγης, μη ιδιόμορφης αλγεβρικής καμπύλης X η οποία είναι ορισμένη υπέρ ενός αλγεβρικά κλειστού σώματος χαρακτηριστικής 0, γένους $g \geq 2$ φράσεται ως εξής:

$$|Aut(X)| \leq 84(g-1).$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν είναι σωστό όταν η χαρακτηριστική του σώματος διαιρεί την τάξη της ομάδας αυτομορφισμών και το γραμμικό στο γένος φράγμα πρέπει να αντικατασταθεί από ένα πολυωνυμικό φράγμα τάξης 4, όπως απέδειξε ο H. Stichtenoth[4]. Στις αλγεβρικές καμπύλες που ορίζονται πάνω από αλγεβρικά κλειστά σώματα πεπερασμένης χαρακτηριστικής εκτός από το γένος μία σημαντική τοπολογική σταθερά είναι η $p-$τάξη της ιακωβιανής πολλαπλότητας γ. Για ένα πυκνό στη τοπολογία του Zariski υποσύνολο του moduli space M_g τις λεγόμενες ordinary curves για τις οποίες ισχύει $g = \gamma$ ο S. Nakajima [5] απέδειξε ότι το εν γένει βαθμού τέσσερα φράγμα μπορεί να βελτιωθεί στο

$$|Aut(X)| \leq 84(g-1)g.$$

Ο Nakajima δεν μπόρεσε να αποδείξει ότι το παραπάνω φράγμα είναι το καλύτερο δυνατό και διατύπωσε την εικασία ότι το φράγμα μπορεί να βελτιωθεί σε πολυώνυμο του $g^{3/2}$.

---

[3] Valentini C.Robert - Madan L. Manohar *A Hauptsatz of L.E. Dickson and Artin-Screier extensions* J. Reine Angewandte Math. **318**, 156-177 (1980)

[4] H. Stichtenoth *Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Functionenkörpers von Promzahlcharacteristik. I Eine Abschätzung der Ordnung der Automorphismengruppe*, Arch. Math (Basel) **24** 1973, 527-544

[5] S. Nakajima *p-ranks and automorphism groups of algebraic curves*, Trans. Amer. Math. **303** (1987), no, 2, 595-607

Η θεωρία των αλγεβρικών καμπύλων που ορίζονται πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών είναι συναρτησιακά ισοδύναμη με την θεωρία των επιφανειών Riemann. Έτσι μία απόδειξη του φράγματος της ομάδας αυτομορφισμών στην μηδενική χαρακτηριστική μπορεί να γίνει αναπαριστόντας την καμπύλη σαν πηλίκο του υπερβολικού χώρου modulo μίας διακριτής ομάδας του Klein. Στην πεπερασμένη χαρακτηριστική μία τέτοια θεωρία uniformization αναπτύχθηκε από τον D. Mumford [6]. Οι καμπύλες του Mumford είναι ordinary αποτελούν ένα ανοιχτό σύνολο (στην rigid analytic τοπολογία) μέσα στις ordinary. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση κατά Mumford μίας uniformizable καμπύλης ως πηλίκο του Bruhat-Tits δέντρου καταλήγουμε στο παρακάτω φράγμα

$$|Aut(X)| \leq max\{12(g-1), 2\sqrt{g}(\sqrt{g}+1)^2\}.$$

Το παραπάνω φράγμα είναι το καλύτερο δυνατό, και υλοποιήται για μία οικογένεια καμπύλων διάστασης ένα στον moduli space των καμπύλων γένους g, για κάθε $g \geq 2$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην εργασία αυτή απαντάμε στο μέχρι τώρα ανοιχτό πρόβλημα υπολογισμού της ομάδας αυτομορφισμών των Drinfeld modular curves $X(n)$.

Στην (6) επεκτείνω αποτελέσματα της διδακτορικής διατριβής σε αλγεβρικά σύνολα που ορίζονται ως complete intersections από αλγεβρικά σύνολα που μοιάζουν με υπερεπιφάνειες Fermat, και απαντώ στα ερωτήματα που μου τέθηκαν από τον A. Adler. Συγκεκριμένα, αποδεικνύω ως πόρισμα του θεωρήματος Deligne-Grothendieck-Lefshetz, ότι οι αυτομορφισμοί μίας προβολικής complete intersection προέρχονται από τους αυτομορφισμούς του περιβάλοντος χώρου. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στον προσδιορισμό των στοιχείων της προβολικής γενικής γραμμικής ομάδας που διατηρούν το αλγεβρικό σύνολο αναλλοίωτο.

Προκειμένου να απλουστευτούν οι υπολογισμοί, δουλεύω με την δυϊκή αλγεβρική πολλαπλότητα. Έτσι υπολογίζεται η ομάδα αυτομορφισμών των υπερεπιφανειών του Fermat με τον απλούστερο δυνατό τρόπο που υπάρχει στην βιβλιογραφία. Οι ίδιες μέθοδοι μου επιτρέπουν να υπολογίσω τις ομάδες αυτομορφισμών υπερεπιφανειών με "διαταραγμένους" εκθέτες δηλαδή προβολικές κλειστότητες των αφινικών αλγεβρικών συνόλων της μορφής:

$$\sum_i x_i^{n_i} + 1 = 0.$$

Στην συνέχεια υπολογίζω ομάδες αυτομορφισμών που προκύπτουν ως complete intersections από δύο υπερεπιφάνειες Fermat διαφορετικών βαθμών, αλλά και από δύο υπερεπιφάνειες Fermat ίδιου βαθμού αλλά με διαφορετικούς συντελεστές. Προκειμένου να αποδείξω ότι οι συνολοθεωρητικές τομές των παραπάνω επιφανειών είναι strict complete intersections χρησιμοποιώ το κριτήριο της Ιακωβιανής του Serre στους Cohen-Macaulay δακτυλίους.

Είναι ενδιαφέρον το ότι οι υπερεπιφάνειες Fermat της μορφής

$$\sum x_i^{q+1} = 0,$$

όπου q είναι δύναμη της χαρακτηριστικής, συμπεριφέρονται σαν τετραγωνικές μορφές. Οι δε τομές δύο από αυτών ταξινομούνται από τον ίδιο configuration space που ταξινομούνται και οι τομές τετραγωνικών μορφών. Σαν παράδειγμα υπολογίζουμε τις

[6] D. Mumford *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*, Compositio Math. **24** (1972) , 129-174

ομάδες αυτομορφισμών της τομής των

$$\sum_{i=1}^{4} X^{q+1} \text{ και } \sum_{i=1}^{4} c_i X^{q+1}$$

ως συνάρτηση της j-invariant.

Στην εργασία (7) μελετάμε το ακόλουθο πρόβλημα: Ο R. Accola [7] παρατήρησε ότι ομαδοθεωρητικές ιδιότητες της ομάδας αυτομορφισμών μπορούν να μεταφερθούν αυτούσιες στα γένη των καμπύλων πηλίκων.

Το γεγονός αυτό βρήκε μία πλήρη εξηγήση από τους E.Kani και M. Rosen [8] που εξέφρασαν το αποτέλεσμα του R. Accola και τις πιθανές γενικέυσεις τους στην γλώσσα της θεωρίας παραστάσεων πεπερασμένων ομάδων. Συγκεκριμένα για κάθε υποομάδα H μπορεί να θεωρήσει κανείς τον norm idempotent ϵ_H που ορίζεται ως ο "μέσος όρος " στα στοιχεία της ομάδας

$$\epsilon_H := \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h.$$

Το αποτέλεσμα που απέδειξαν είναι ότι οι τοπολογικές σταθερές γένος, και p-rank της καμπύλης συνδέονται ακριβώς με τις γραμμικές σχέσεις που ικανοποιούν τα norm idempotents στην άλγεβρα ομάδος $k[G]$ της ομάδας αυτομορφισμών.

Η εργασία αυτή προσπαθούμε να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στην περίπτωση των δακτυλίων ακαιρέων αλγεβρικών που ενός σώματος αριθμών. Είναι γενικά γνωστό οτί πολλές ιδιότητες των δακτυλίων του Dedekind είναι ανεξάρτητες από το αν ο δακτύλιος προέρχεται ως δακτύλιος συναρτήσεων μίας καμπύλης - επιφάνειας Riemann ή σαν δακτύλιος αλγεβρικών αριθμών.

Στην περίπτωση που μελετάμε το γένος πρέπει να αντικατασταθεί με το Arakelov γένος, η Ιακοβιανή πολλαπλότητα από την πλήρη ομάδα κλάσεων $CH^1(\bar{\mathcal{O}}_K)$ ενώ σαν p-rank της ιακοβιανής μπορούμε να ερμηνεύσουμε την διαφορά του πλήθους των μιγαδικών μείον το πλήθος των πραγματικών εμφυτεύσεων του σώματος αριθμών.

Η απόδειξη του αναλόγου βασίζεται στην Galois αναπαράσταση της ομάδας ενός σώματος στο πεπερασμένο και άπειρο κομμάτι της $CH^1(\bar{\mathcal{O}}_K)$.

Ηράκλειο 11 Ιουνίου 2001
Αριστείδης Κοντογεώργης
Πανεπιστήμιο Κρήτης,Τμήμα Μαθηματικών
Ηράκλειο 71409
email:kontogar@math.uch.gr
http:\\www.math.uch.gr\kontogar

[7] R. D. M. Accola, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 477–482

[8] E. Kani M.Rosen Relations between genera and between Hasse-Witt invariants of Galois Covers of curves. Canad. Math. Bull, 28(3), 1985