ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2017

Άλκης Τερσένοβ

Κεφάλαιο I.

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

§0 **Εισαγωγή**

Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα από την κλασική Φυσική.

Θεωρούμε την ελεύθερη πτώση στην ατμόσφαιρα ενός αντικειμένου μάζας 1 από ένα αρχικό σημείο που βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης (βλ. σχήμα 1 σελίδα 105). Ας «μεταφράσουμε» αυτή τη διαδικασία στη μαθηματική γλώσσα. Έστω $s(t)$ είναι η απόσταση που κάλυψε το αντικείμενο αφού πέρασε χρόνος t από την έναρξη της πτώσης. Προφανώς η παράγωγος πρώτης τάξης της $s(t)$ είναι η ταχύτητα και η παράγωγος δεύτερης τάξης είναι η επιτάχυνση του αντικειμένου η οποία ισούται με g:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \tag{0.1}$$

εδώ g είναι η επιτάχυνση βαρύτητας (κοντά στην επιφάνεια της Γης). Ολοκληρώνοντας μια φορά έχουμε

$$v(t) \equiv \frac{ds}{dt} = gt + C_1$$

(εδώ v είναι η ταχύτητα) ολοκληρώνοντας δεύτερη φορά παίρνουμε

$$s(t) = gt^2/2 + C_1 t + C_2 \tag{0.2}$$

όπου C_1, C_2 αυθαίρετες σταθερές. Για να τις προσδιορίσουμε χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορίες. Η απόσταση από το αρχικό σημείο από όπου ξεκίνησε η πτώση τη χρονική στιγμή που ξεκίνησε (έστω $t = 0$) είναι μηδέν, το ίδιο και η ταχύτητα άρα

$$s(0) = 0, \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{0.3}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις συνθήκες και την (0.2) έχουμε ότι

$$s(0) = C_2 = 0, \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = C_1 = 0$$

άρα η λύση του προβλήματος (0.1), (0.2) είναι

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}. \tag{0.4}$$

Το πρόβλημα (0.1), (0.3) ονομάζεται <u>*πρόβλημα αρχικών τιμών*</u> ή <u>*πρόβλημα Cauchy*</u>, οι συνθήκες (0.3) ονομάζονται αρχικές συνθήκες.

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} gt = +\infty,$$

όμως είναι γνωστό ότι ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση στην ατμόσφαιρα δεν μπορεί να αναπτύξει ταχύτητες πάνω από ένα συγκεκριμένο όριο. Το «λάθος» μας ήταν το ότι δεν συνυπολογίσαμε την αντίσταση της ατμόσφαιρας η οποία, για σχετικά μικρές ταχύτητες, ισούται με $kv^2(t)$, όπου

$k > 0$ μία σταθερά. Μετά τη διόρθωση του «λάθους» η εξίσωση παίρνει την εξής μορφή

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g - k\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2. \tag{0.5}$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα (0.5), (0.3) γράφουμε την (0.5) για την ταχύτητα $v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 \ \text{ με αρχική συνθήκη } \ v(0) = 0. \tag{0.6}$$

Την εξίσωση (0.6) την γράφουμε σε μορφή

$$1 = \frac{1}{g - kv^2}\frac{dv}{dt} \ \text{ ή } \ 1 = \frac{1}{g - k\xi^2}\frac{d\xi}{d\tau} \ \text{ ή } \ d\tau = \frac{1}{g - k\xi^2} d\xi$$

ολοκληρώνοντας ως προς τ από 0 έως t (ξ από 0 έως v) έχουμε

$$t = \int_0^v \frac{d\xi}{g - k\xi^2} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}} \int_0^v d \ln \frac{|\sqrt{g} + \sqrt{k}\xi|}{|\sqrt{g} - \sqrt{k}\xi|} = \frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln \frac{|\sqrt{g} + \sqrt{k}\xi|}{|\sqrt{g} - \sqrt{k}\xi|}\Big|_{\xi=0}^{\xi=v} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln \frac{|\sqrt{g} + \sqrt{k}v|}{|\sqrt{g} - \sqrt{k}v|}.$$

Αν υποθέσουμε οτι $0 \le v(t) < \sqrt{g/k}$ για $0 \le t < +\infty$ (αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε αυστιρά, βλ. σημειώσεις για το μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις), τότε καταλήγουμε στη σχέση

$$2\sqrt{gk}t = \ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k}v}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v} \ \text{ ή } \ e^{2\sqrt{gk}t} = \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k}v}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v}.$$

Συνεπώς

$$v(t) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}} \frac{e^{2\sqrt{gk}t} - 1}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1}, \tag{0.7}$$

και

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \frac{1}{k} \ln \frac{e^{2\sqrt{gk}t} + 1}{2} - \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}} t. \tag{0.8}$$

Παρατηρούμε ότι

$$v_\infty = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}} \frac{e^{2\sqrt{gk}t} - 1}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}} < +\infty$$

που αντιστοιχεί στη πραγματικότητα. Η v_∞ μερικές φορές ονομάζεται τερματική ταχύτητα. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε οτι μπορούμε να την προσδιορίσουμε και με άλλο τρόπο, χωρίς να λύσουμε το πρόβλημα (0.6). Η τερματική ταχύτητα επιτυγχάνεται όταν ισορροπούν η βαρύτητα και η αντίσταση της ατμόσφαιρας, δηλαδή

$$g = k\,v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}}.$$

Ας πάμε πίσω στην εξίσωση (0.1). Έστω τώρα θέλουμε η πτώση να είναι τέτοια ώστε στη χρονική στιγμή $t_0 > 0$ το αντικείμενο να βρίσκεται σε απόσταση $d > 0$ από το αρχικό σημείο (όπως και πριν στην αρχική στιγμή $t = 0$ η απόσταση από το αρχικό σημείο είναι μηδέν) δηλαδή σε αυτή τη περίπτωση έχουμε

$$s(0) = 0, \quad s(t_0) = d. \tag{0.9}$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση του αντικειμένου σε οποιαδήποτε στιγμή $t \in [0, t_0]$. Οι συνθήκες, που προσδιορίζουν τις σταθερές της λύσης (0.2), δίδονται στα άκρα του διαστήματος $[0, t_0]$, δηλαδή στο σύνορο. Από εδώ προέρχεται η ονομασία τέτοιου είδους προβλημάτων - *προβλήματα συνοριακών τιμών*. Οι συνθήκες (0.9) ονομάζονται συνοριακές συνθήκες. Προφανώς η λύση του προβλήματος (0.1), (0.9) δίνεται από τον τύπο

$$s(t) = g\frac{t^2}{2} + \Big(\frac{d}{t_0} - g\frac{t_0}{2}\Big)t \tag{0.10}$$

αφού

$$s(0) = C_2 = 0$$

και

$$s(t_0) = g\frac{t_0^2}{2} + C_1 t_0 = d \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{d}{t_0} - g\frac{t_0}{2}.$$

Ενα άλλο απλό παραδειγμα είναι το εξής. Έστω ότι η μάζα ενός διαστημόπλοιου μαζί με τα καύσιμα ειναι M και χωρίς τα καυσιμα είναι m. Ας υποθέσουμε ότι το διαστημόπλοιο βρίσκεται σε ακινησία (σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς). Γνωρίζουμε ότι αν ενεργοποιηθεί ο κινητήρας η ταχύτητα εκροής των καυσαερίων θα είναι σταθερή και θα ισούται με $\kappa > 0$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητα που θα αναπτύξει το διαστημόπλοιο (μετά την ενεργοποίηση του κινητήρα) αφού καταναλωθούν όλα τα καύσιμα. Θεωρούμε οτι η κίνηση γίνεται χωρίς τριβή και χωρίς επίδραση οποιασδήποτε άλλης δύναμης.

Θα μεταφράσουμε το πρόβλημά μας στη γλώσσα των διαφορικών εξισώσεων. Έστω x η μάζα των καυσίμων που καταναλώθηκαν και η $v(x)$ η ταχύτητα που ανέπτυξε το διαστημόπλοιο αφου ξοδέψαμε x καύσιμα. Προφανώς $x \in [0, M - m]$. Ας υποθέσουμε ότι ο κινητήρας έχει καταναλώσει ακόμα ενα απειροελάχιστο ποσό καυσίμων Δx. Ποια θα είναι η μεταβολή της ταχύτητας; Σύμφωνα με τον νόμο διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\big(v(x + \Delta x) - v(x)\big)\big(M - x - \Delta x\big) = \kappa\,\Delta x$$

άρα
$$\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=\frac{\kappa}{M-x-\Delta x}$$
ή
$$\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=\frac{\kappa}{M-x}+\frac{\kappa\Delta x}{(M-x-\Delta x)(M-x)}.$$
Περνάμε στο όριο καθώς $\Delta x\to 0$ και έχουμε

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\kappa}{M-x}. \tag{0.11}$$

Ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στην

$$v(x)=C+\kappa\, ln\frac{M}{M-x} \tag{0.12}$$

όπου η C είναι μια αυθαίρετη σταθερά, για να την προσδιορίσουμε θα θυμηθούμε ότι για $x=0$ το διαστημόπλοιο βρισκόταν σε ακινησία, δηλαδή $v(0)=0$, άρα $C=0$ διότι
$$v(0)=C+\kappa\, ln\, 1=C=0.$$
Συνεπώς

$$v(x)=\kappa\, ln\frac{M}{M-x} \tag{0.13}$$

Και η απάντηση στο ερώτημα είναι
$$v(M-m)=\kappa\, ln\frac{M}{m}.$$

Η διαδικασία της «μετάφρασης» ενός φυσικού φαινομένου στη μαθηματική γλώσσα ονομάζεται μοντελοποίηση. Πολλά μοντέλα φυσικών (και όχι μόνο) φαινομένων ανάγονται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως δεν είναι δυνατόν να βρεθεί η λύση σε «κλειστή μορφή» δηλαδή σε μορφή μιας συγκεκριμένης συνάρτησης (ή σύνθεσης συναρτήσεων) που λύνει το πρόβλημα. Ακόμα και στο παράδειγμά μας αν θα πάρουμε τις σταθερές k και g να είναι συναρτήσεις του ύψους (που προφανώς είναι), τότε δεν θα μπορέσουμε να βρούμε τη λύση σε κλειστή μορφή.

Η επιτάχυνση βαρύτητας σε ένα ύψος h_1 πάνω απο την επιφάνεια της Γης ισούται με
$$g_{h_1}=\frac{R^2}{(h_1+R)^2}g \quad \text{όπου} \quad R-\text{ακτίνα της Γης}$$
στην επιφάνεια της Γης $h_1=0$ και η επιτάχυνση ισούται με g.

Όσο πιο χαμηλά βρίσκεται το αντικείμενο τόσο η αντίσταση της ατμόσφαιρας μεγαλώνει λόγω αυξησης της πυκνότητας άρα k ειναι συνάρτηση του $h-s$: $k=k(h-s)$.

Η εξίσωση (0.5) θα πάρει την εξής μορφή

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{R^2}{(h-s+R)^2}g-k(h-s)\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2. \tag{0.14}$$

Προφανώς και οι δυο διορθώσεις βελτιώνουν την ακρίβεια της περιγραφής του φαινομένου, όμως δεν μπορούμε να βρούμε την λύση της (0.14) σε κλειστή μορφη.

Ενα εύλογο ερώτημα είναι αν η λύση του προβλήματος (0.14), (0.3) υπάρχει; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα την δώσουμε στο μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Στο εξής την άγνωστη (προσδιοριστέα) συνάρτηση θα συμβολίζουμε με y και την μεταβλητή με x ή t ($y = y(x)$ ή $y = y(t)$).

Συνήθη διαφορική εξίσωση ονομάζεται εξίσωση της μορφής

$$\Phi(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0, \quad n - \text{φυσικός αριθμός}$$

ή (αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό y' αντί για $\frac{dy}{dx}$, y'' αντί για $\frac{d^2y}{dx^2}$,..., και $y^{(n)}$ αντί για $\frac{d^ny}{dx^n}$)

$$\Phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

όπου Φ είναι συνάρτηση $n + 2$ μεταβλητών. Λέμε ότι η εξίσωση είναι σε *κανονική* (ή *λυμένη*) μορφή αν μπορεί να γραφτεί ως

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

όπου F είναι συνάρτηση $n + 1$ μεταβλητών.

Π.χ.

$$y' = 1 - k(x)y^2, \quad \text{εδώ} \ \ F(x, y) = 1 - k(x)y^2, \tag{0.15}$$

η εξίσωση αυτή έχει να κάνει με την ταχύτητα πτώσης αντικειμένου σε ατμόσφαιρα, $k(x)$ είναι δοσμένη συνάρτηση,

$$y''' + y\,y'' = (y')^2 - 1, \quad F(x, y, y', y'') = -y\,y'' + (y')^2 - 1, \tag{0.16}$$

$$(y'')^2 - \frac{2}{3}(y')^3 + y' = C, \quad \Phi(x, y, y', y'') = (y'')^2 - \frac{2}{3}(y')^3 + y' - 1, \tag{0.17}$$

$$y'' = \lambda \sin y, \quad F(x, y, y', y') = \lambda \sin y, \tag{0.18}$$

οι εξισώσεις (0.16), (0.17) εμφανίζονται στην άερο- και υδροδυναμική (οριακά στρώματα), η (0.18) στην κβαντομηχανική, C, λ είναι κάποιες σταθερές,

$$y' = \kappa(x)y, \quad F(x, y) = k(x)y, \tag{0.19}$$

αυτή η εξίσωση (ο νόμος του $Malthous$) με δοσμένη συνάρτηση $\kappa(x)$ εμφανίζεται στην βιολογία.

Στην εξίσωση

$$y(1 + (y')^2) = C, \quad \Phi(x, y, y') = y\,(y')^2 + y - C, \tag{0.20}$$

ανάγεται το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου ενω η

$$y'' + by' + a^2y = 0, \quad F(x, y, y') = -by' - a^2y, \tag{0.21}$$

όπου a, b σταθερές, περιγράφει τις ελαστικές ταλαντώσεις με απόσβεση.

Η εξίσωση $Riccati$

$$y' = c(x)y^2 + d(x)y + g(x), \quad F(x,y) = -c(x)y^2 - d(x)y - g(x). \tag{0.22}$$

έχει εφαρμογές στην κλασική μηχανική και κβαντομηχανική, εδώ $g(x)$, $c(x)$, $d(x)$ καποιές δοσμένες συναρτήσεις.

Υπάρχουν και πολλά άλλα φαινομενα που περιγράφονται με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Μια n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ονομάζεται *λύση της διαφορικής εξίσωσης*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \quad x \in I \subset \mathbf{R}$$

ή της

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad x \in I \subset \mathbf{R}$$

αν η $y(x)$ επαληθεύει την εξίσωση για κάθε $x \in I$. Δηλαδή η αντικατάσταση της $y(x)$ στην εξίσωση μας δίνει ταυτότητα. Π.χ. οι (0.2), (0.4) και η (0.10) είναι λύσεις της (0.1), η (0.7) είναι λύση της (0.6), η (0.8) της (0.5) και οι (0.12), (0.13) της (0.11).

Τάξη μιας εξίσωσης ονομάζεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης που εμφανίζεται στην εξίσωση.
Η τάξη των (0.6), (0.11), (0.15), (0.17), (0.20) και της (0.22) είναι 1, η τάξη των (0.1), (0.5), (0.14), (0.17), (0.18) και (0.21) είναι 2, η τάξη της (0.16) είναι 3.

Μια εξίσωση ονομάζεται *γραμμική* αν η συνάρτηση Φ είναι γραμμική ως προς τις $y, y', ..., y^{(n)}$, δηλαδή έχει τη μορφή

$$\Phi = f(x) + a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_n y^{(n)},$$

σε αντίθετη περίπτωση η εξίσωση ονομάζεται *μη γραμμική*. Γενική μορφή μιας γραμμικής εξίσωσης n τάξεως είναι

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

όπου $a_i(x), \quad i = 1, ..., n$, $f(x)$ δοσμένες συναρτήσεις, οι $a_i(x), \quad i = 1, ..., n$ ονομάζονται συντελεστές της εξίσωσης και η $f(x)$ το δεξή (ή δευτερο) μέρος της εξίσωσης.

Εξίσωση σε κανονική μορφή ονομάζεται *γραμμική* αν η συνάρτηση F είναι γραμμική ως προς τις $y, y', ..., y^{(n-1)}$. Γενική μορφή μιας γραμμικής εξίσωσης n τάξεως σε κανονική μορφή είναι

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{0.23}$$

Προφανώς οι εξισώσεις (0.1), (0,9), (0.19) και (0.21) είναι γραμμικές, ενω οι (0.5), (0.6), (0.14) - (0.18) και (0.20), (0.22) είναι μη γραμμικές.

Αν πάμε πίσω στην εξίσωση (0.1), βλέπουμε οτι η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις (0.2), για να προσδιορίσουμε μια κα μοναδική χρειαζόμαστε επιπλέον συνθήκες π.χ. αρχικές (0.3) ή συνοριακές (0.9). Αν πάμε στην εξίσωση (0.11) επίσης βλέπουμε ότι αυτη έχει άπειρες λύσεις (0.12) και η αρχική συνθήκη μας εξασφαλίζει την μοναδική λύση (0.13). Παρατηρούμε ότι για την εξίσωση πρώτης τάξης γαι να προσδιορίσουμε την μοναδική λύση χρειαζόμαστε μια συνθήκη ενω για την εξίσωση δευτερις τάξης 2, στην περίπτωση εξίσωσης n τάξεις χρειαζόμαστε n συνθήκες. Το γιατί θα το μάθουμε στο μάθημα Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις.

Γενική λύση της εξίσωσης σε κανονική μορφή είναι ένας τύπος που περιέχεις όλες τις λύσεις της εξίσωσης

Μερική (ή ειδική) λύση της εξίσωσης είναι μία συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης

Π.χ. ο τύπος (0.2) είναι γενική λύση της εξίσωσης (0.1) ενώ η συναρτήσεις (0.4) και (0.10) ειναι μερικές λύσεις της (0.1), ο τύπος (0.12) είναι γενική λυση της (0.11), η συνάρτηση (0.13) είναι η μερική λύση της (0.11).

Μερικές φορές η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών υπάρχει παντου (βλ. (0.7)) μερικές φορές όχι. Π.χ. η λύση του προβλήματος

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \ \ y(0) = 1,$$

η συνάρτηση

$$y(x) = (1-x)^{-1}$$

υπάρχει μόνο για $x < 1$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε παράδειγμα όπου η λύση θα υπάρχει μόνο σε ένα διάστημα (a, b) γύρο απο το σημείο 0, ή να μην υπάρχει καθόλου.

Έχουμε εδώ ενα εύλογο ερώτημα: πότε συμβαίνει το ένα και πότε το άλλο και γιατί;

Επίσης είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αν η λύση του προβλήματος είναι μοναδική. Π.χ. το πρόβλημα

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \ \ y(0) = 0,$$

έχει τουλάχιστον δύο λύσεις, την

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & \text{για } \ x \geq 0 \\ 0, & \text{για } \ x < 0 \end{cases}$$

και την $y(x) \equiv 0$. Μπορούμε να δείξουμε οτι το προβλημα αυτό έχει άπειρες λύσεις. Η μοναδικότητα παραβιάζεται. Άρα πρέπει να ξέρουμε υπο ποιες προϋποθέσεις η λύση είναι μοναδική.

Τις απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα θα τις μάθετε στο μάθημα **Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις**. Στο μάθημα **Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις** θα περιοριστούμε με την επίλυση τον εξισώσεων για τις οποιες μπορούμε να βρούμε τη λύση σε «κλειστή μορφή».

§1. Εξισώσεις με χωρισμένες μεταβλητές

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \text{ ή } y' = F(x,y) \tag{1.1}$$

ονομάζεται <u>*εξίσωση με χωρισμένες μεταβλητές*</u> αν η F μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δυο συναρτήσεων όπου η μια είναι συνάρτηση μονο της μεταβλητής x και η άλλη μονο της y, δηλαδή

$$F(x,y) = f(x)\,\phi(y) \text{ ή } F(x,y) = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση η (1.1) παίρνε τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \text{ ή } y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{1.2}$$

και μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ ή ισοδύναμα } g(y)y' = f(x) \text{ ή } g(y)dy = f(x)dx. \tag{1.3}$$

Ολοκληρώνοντας θα έχουμε

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + C$$

ή ισοδύναμα (αφου $dy = y'dx$)

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C \tag{1.4}$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Συνεπώς η επίλυση της (1.2) ανάγεται στον προσδιορισμό των παραγουσών των g και f. Έστω $G(y)$ κάποια παράγουσα της $g(y)$ και $F(x)$ κάποια παράγουσα της $f(x)$ $\big(G'(y) = g(y)$ και $F'(x) = f(x)\big)$ τότε τη σχέση (1.4) την γράφουμε ως

$$G(y) = F(x) + C. \tag{1.5}$$

Ο τύπος (1.4) $\big($ ή (1.5)$\big)$ μας δίνει την γενική λύση της (1.2). Για να προσδιορίσουμε κάποια συγκεκριμένη (μερική) λύση θα πρέπει να προσθέσουμε στην εξίσωση την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0$$

όπου x_0 και y_0 είναι δοσμένοι αριθμοί. Σε αυτήν την περίπτωση την σταθερά την προσδιορίζουμε από τη σχέση

$$C = G(y_0) - F(x_0)$$

αφού αν $x = x_0$ τότε $y = y_0$, ή αλλιώς ολοκληρώνουμε την σχέση (1.3) παίρνοντας ορισμένο ολοκλήρωμα με x να μεταβάλλεται απο x_0 και y από y_0, δηλαδή

$$\int_{y_0}^{y} g(\eta)d\eta = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi. \tag{1.6}$$

Παρατηρούμε οτι την αρχική συνθήκη μπορούμε να την τοποθετούμε σε οποιοδήποτε σημείο x_0 και όχι απαραίτητα στο σημείο 0.

Παράδειγμα 1.1. Προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = y^2.$$

Λύση. Έχουμε

$$\frac{dy}{y^2} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \tag{1.7}$$

άρα η γενική λύση είναι

$$\frac{1}{y} = C - x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{C - x}. \tag{1.8}$$

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης που επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0$$

(δηλαδή τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών) μπορούμε, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, να ενεργήσουμε με δυο τρόπους.

1. Αντικαθιστώντας $x = x_0$, $y = y_0$ στην σχέση (1.8) θα προσδιορίσουμε τη σταθερά C:

$$y(x_0) = \frac{1}{C - x_0} = y_0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{y_0} + x_0.$$

Άρα η μερική λύση που ψάχνουμε είναι η

$$y(x) = \frac{1}{1/y_0 + x_0 - x}.$$

Για $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ έχουμε

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

2. Ολοκληρώνοντας την σχέση (1.7) από x_0 εως x και από y_0 εως y:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta^2} = \int_{x_0}^{x} d\xi$$

παίρνουμε

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} = x_0 - x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{1/y_0 + x_0 - x}.$$

Παράδειγμα 1.2. Προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Λύση. Έχουμε

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \tag{1.9}$$

ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C \quad \Rightarrow \quad ln|y| = ln|x| + C,$$

συνεπώς

$$|y| = e^C|x|$$

αρα (αφου θέλουμε η λύση να είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση)

$$y = \pm e^C x.$$

Την σχέση $y = \pm e^C x$ μπορούμε να τη γράψουμε ως $y = C_1 x$ όπου C_1 αυθαίρετη σταθερά διάφορη του μηδενός (αφού η εκθετική συνάρτηση δεν μηδενίζεται πουθενά). Όμως λαμβάνοντας υπ όψιν το γεγονός ότι το μηδέν (δηλαδή η συνάρτηση $y(x) \equiv 0$) είναι λύση της εξίσωσης μας καταλήγουμε στο ότι η γενική λύση είναι η

$$y(x) = C_1 x \ \text{ με τυχαίο } \ C_1 \in \mathbf{R}. \tag{1.10}$$

Τη μηδενική λύση την «χάσαμε» όταν διαιρέσαμε δια y.

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης που επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0 \ \ (x_0 \neq 0)$$

μπορούμε, να ενεργήσουμε με δυο τρόπους.

1. Αντικαθιστώντας $x = x_0$, $y = y_0$ στην σχέση (1.10) θα προσδιορίσουμε τη σταθερά C_1:

$$y(x_0) = C_1 x_0 = y_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{y_0}{x_0}.$$

Άρα η μερική λύση που επαληθεύει την αρχική συνθήκη είναι η

$$y(x) = \frac{y_0}{x_0} x.$$

2. Ολοκληρώνοντας την σχέση (1.9) από x_0 εως x και από y_0 εως y:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi}$$

παίρνουμε

$$ln|y| - ln|y_0| = ln|x| - ln|x_0| \quad \Rightarrow \quad ln\left|\frac{y}{y_0}\right| = ln\left|\frac{x}{x_0}\right| \quad \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0},$$

δηλαδή

$$y = \frac{y_0}{x_0} x.$$

Παρατηρούμε ότι αρχικές συνθήκες δοσμένες στο $x = 0$ ή δεν προσδιορίζουν την σταθερα (αν θέτουμε $y(0) = 0$) ή δεν δίνουν λύση (αν θέτουμε $y(0) = y_0 \neq 0$). Αυτό συμβαίνει επειδή στο σημείο $x = 0$ η συνάρτηση $F(x, y) = y/x$ δεν είναι συνεχής.

Θα δούμε τωρα τρεις περιπτώσεις εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις με χωρισμένες μεταβλητές.

I. Πρώτη περίπτωση είναι οι εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by) \tag{1.11}$$

όπου a, $b-$ σταθερές. Για να λύσουμε τετοίου είδους εξισώσεις εισάγουμε καινούργια συνάρτηση $z(x) = ax + by(x)$ για την οποία προφανως έχουμε

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

αρα, λαμβάνοντας υπ όψιν την (1.11),

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

συνεπώς

$$\frac{dz}{a+bf(z)} = dx$$

και

$$x = \int \frac{dz}{a+bf(z)} + C.$$

Απο εδώ προσδιορίζουμε την $z(x)$ και κατόπιν την $y(x)$.

Παράδειγμα 1.3 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Λύση. Εισάγουμε την $z = 2x + y$ για την οποία ισχύει

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} + 2, \quad \frac{dz}{dx} = z + 2.$$

Συνεπώς

$$\frac{dz}{z+2} = dx, \quad ln|z+2| = x + C, \quad z + 2 = \pm e^C e^x,$$

αρα

$$z = \tilde{C}e^x - 2, \quad \tilde{C} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

και αφου $z = -2$ είναι λύση

$$z = Ce^x - 2, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Συνεπώς

$$2x + y = Ce^x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^x - 2x - 2.$$

Για να προσδιορίσουμε τη λύση η οποία επαληθευει την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$ ο ευκολότερος τρόπος είναι να προσδιορίσουμε την αυθαίρετη σταθερα αντικαθιστώντας την αρχική συνθήκη στην γενική λύση:

$$y_0 = Ce^{x_0} - 2x_0 - 2$$

άρα

$$C = e^{-x_0}(y_0 + 2x_0 + 2)$$

επονένως η ζητούμενη λύση είναι

$$y(x) = e^{-x_0}(y_0 + 2x_0 + 2)e^x - 2x - 2.$$

II. Δευτερη περίπτωση - εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Για να λύσουμε τέτοιου είδους εξισώσεις εισάγουμε καινούργια συνάρτηση

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \ \text{ ή } \ y(x) = xz(x).$$

Προφανώς

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

και

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Συνεπώς

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = ln|x| + lnC \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}.$$

Απο δω προσδιορίζουμε την $z(x)$ και μετά την $y(x)$.

Παράδειγμα 1.4. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tan\frac{y}{x}.$$

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση

$$y = x\,z$$

προφανώς

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z.$$

Έχουμε

$$x\frac{dz}{dx} + z = z + tan\,z \quad \Rightarrow \quad \frac{cos\,z\,dz}{\sin\,z} = \frac{dx}{x}$$

άρα

$$\ln|\sin\,z| = \ln|x| + C, \ \ \sin\,z = \pm e^C x$$

και αφου $z = 0$ είναι λύση της $z' = tan\,z$ η γενική λύση θα είναι

$$z = \arcsin Cx, \ \ C \in \mathbf{R}$$

Συνεπώς

$$y(x) = x\ \arcsin\ Cx, \ \ C \in \mathbf{R}.$$

Αν θέλουμε $y(x_0) = y_0$ $(x_0 \neq 0)$, τότε ευκολά καταλήγουμε στο ότι

$$C = \frac{1}{x_0}\sin\frac{y_0}{x_0}.$$

Εδω (όπως και στο Παράδειγμα 1.2 και για ίδιους λόγους) στο σημείο $x_0 = 0$ δεν μπορούμε να βάλουμε αυθαίρετο y_0.

Με τον ίδιο τρόπο λύνεται η εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

όταν οι M και N ειναι ομογενείς συναρτήσεις ίδιου βαθμού, δηλαδή

$$M(\kappa x, \kappa y) = \kappa^m M(x,y), \quad N(\kappa x, \kappa y) = \kappa^m N(x,y) \ \ \forall \kappa$$

Πράγματι

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M(x \cdot 1, x\frac{y}{x})}{N(x \cdot 1, x\frac{y}{x})} = \frac{x^m M(1, \frac{y}{x})}{x^m N(1, \frac{y}{x})} = \frac{M(1, \frac{y}{x})}{N(1, \frac{y}{x})} = f\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

Άρα η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Παράδειγμα 1.5. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Λύση. Εδω

$$M(\kappa x, \kappa y) = (\kappa x)^2 - (\kappa y)^2 = \kappa^2(x^2 - y^2) = \kappa^2 M(x,y),$$
$$N(\kappa x, \kappa y) = (\kappa x)^2 + (\kappa y)^2 = \kappa^2(x^2 + y^2) = \kappa^2 N(x,y).$$

Αρα κάνουμε την αντικατάσταση

$$y = x\,z$$

και έχουμε

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} - z$$

δηλαδη

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1 - z - z^2 - z^3}{1 + z^2}.$$

Η γενική λύση της τελευταίς είναι

$$\int \frac{1 + z^2}{1 - z - z^2 - z^3} dz = \ln|x| + C.$$

Αν θέλουμε π.χ. $y(1) = -1$ και συνεπώς $z(1) = -1$ τότε η z που θέλουμε προκύπτει απο την σχέση (βλ. (1.6))

$$\int_{-1}^{z} \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta - \zeta^2 - \zeta^3} d\zeta = \ln x.$$

III. Τρίτη περίπτωση. Θεωρούμε εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\Big) \tag{1.12}$$

Υποθέτουμε οτι οι ευθείες

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \tag{1.13}$$

τέμνονται στο σημείο (x^*, y^*) (δηλαδή το αλγεβρικό σύστημα (1.13) έχει μοναδική λύση (x^*, y^*)). Κάνουμε την εξής αντικατάσταση

$$\xi = x - x^*, \quad \eta = y - y^*.$$

Προφανώς ισχύει
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}$$
και
$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\Big(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\Big)$$
δηλαδή
$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\Big(\frac{a_1 + b_1\eta/\xi}{a_2 + b_2\eta/\xi}\Big) = \phi(\frac{\eta}{\xi}).$$
Άρα καταλήξαμε στην προηγούμενη περίπτωση. Αν τώρα οι ευθέιες (1.13) είναι παράλληλες, τότε ισχύει
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$
και η εξήσωση (1.12) παίρνει τη μορφή
$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\Big) = F(a_1x + b_1y)$$
δηλαδή έχουμε την πρώτη περίπτωση.

Παράδειγμα 1.6. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$
Λύση. Η λύση του αλγεβρικού συστήματος
$$x - y + 1 = 0$$
$$x + y - 3 = 0$$
είναι $x^* = 1$, $y^* = 2$. Η αντικατάσταση $\xi = x - 1$, $\eta = y - 2$ μας οδηγεί στην
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}.$$
Για την συνάρτηση $z(\xi)$, όπου $\eta(\xi) = \xi\, z(\xi)$, έχουμε
$$z + \xi\frac{dz}{d\xi} = \frac{1 - z}{1 + z} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{d\xi}{\xi}$$
ολοκληρώνοντας παίρνουμε
$$-\frac{1}{2}ln|1 - 2z - z^2| = ln|\xi| + C$$
άρα
$$ln(|1 - 2z - z^2|\, \xi^2) = -2C \quad \Rightarrow \quad (1 - 2z - z^2)\xi^2 = C_1.$$
Συνεπώς
$$(1 - 2z - z^2)\xi^2 = C_1 \quad \Rightarrow \quad \xi^2 - 2\xi\eta - \eta^2 = C_1$$
άρα
$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1.$$
Εδω έχουμε την γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή.

Αν θέλουμε π.χ. να ισχύει $y(0) = 1$, τότε $C_1 = 5$.

Ασκήσεις

Προσδιορίστε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων εξισώσεων και έπειτα να βρείτε τη λύση του προβλήματος $Cauchy$:

1.
$$\frac{dy}{dx} = k(x)y, \quad y(x_0) = y_0,$$

2.
$$\frac{dy}{dx} = y^4, \quad y(0) = -1,$$

3.
$$y\frac{dy}{dx} + (1+y^2)\cos x = 0, \quad y(0) = 2$$

4.
$$\frac{dy}{dx} = y - 2x, \quad y(0) = 0,$$

5.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1, \quad y(1) = 0.$$

Εξετάστε επίσης την περίπτωση $y(1) = 1$.

6.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}, \quad y(0) = 1.$$

7.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}, \quad y(0) = 1,$$

8.
$$\frac{dy}{dx} = 4 - y^2, \quad y(0) = 1.$$

§2. Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης έχουν την εξής μορφή (βλ. (0.23))

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

όπου οι $p(x)$, $f(x)$ είναι δωσμένες συνεχείς συναρτήσεις. Η $p(x)$ ονομάζεται συντελεστής και η $f(x)$ το δευτερο μέρος της εξίσωσης. Αν $f(x) \equiv 0$ τότε η (2.1) ονομάζετε ομογενής εξίσωση. Ας ξεκινήσουμε με αυτην την περίπτωση. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2.2}$$

ή

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -p(x) \text{ ή ισοδύναμα } \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

(άρα εξίσωση με χωρισμένες μεταβλητές) ολοκληρόνοντας παίρνουμε

$$ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C, \quad C > 0$$

και

$$y(x) = \pm e^C e^{-\int p(x)dx}.$$

Αφου C αυθαίρετη θετική σταθερά, τότε η $\pm e^C$ είναι αυθαίρετη σταθερά διάφορη του μηδενός. Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι το μηδέν είναι λύση της (2.1) την οποία την «χάσαμε» όταν διαιρέσαμε δια το y, καταλήγουμε στον τύπο

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbf{R} \tag{2.3}$$

εδω C τίναι τυχάια σταθερα (όχι απαραίτητα διάφορη του μηδενός). Άρα ο τύπος (2.3) μας δίνει την γενική λύση της εξήσωσης (2.2).

Ας βρούμε τωρα την γενική λύση της εξίσωσης (2.1). Θα αποδείξουμε τον εξής ισχυρισμό

Γενική λύση της (2.1)=

(2.4) **γενική λύση της** (2.2) **+ μερική λυση της** (2.1).

Ο τύπος (2.4) μας λέει οτι αν βρίκαμε κάποια λύση της (2.1) έστω $y_\mu(x)$, τότε οποιαδήποτε αλλή λύση $y_1(x)$ της (2.1) θα έχει τη μορφή

$$y_1(x) = y_\mu(x) + y_0(x)$$

όπου $y_0(x)$ κάποια λύση της (2.2). Άρα για να αποδείξουμε την (2.4) αρκεί να δείξουμε οτι η $y_0 = y_1 - y_\mu$ είναι όντως λύση της (2.2). Πράγματι έχουμε

$$\frac{dy_0}{dx} + p(x)y_0 = \frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 - \big(\frac{dy_\mu}{dx} + p(x)y_\mu\big) = f(x) - f(x) = 0$$

η τελευταία ισότητα προκύπτει απο το γεγονός ότι και η y_1 και η y_μ είναι λύσεις της (2.1).

Συνεπώς για να βρούμε την γενική λύση της (2.1) (αφού έχουμε ήδη βρει την γενική λυση της (2.2) αρκεί να βρούμε μερική (δηλαδή κάποια) λύση της (2.1).

Θα χρησιμοποίησουμε την *μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών* τουτέστιν θα ψάχνουμε την μερική λύση σε μορφή

$$y(x) = c(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{2.5}$$

αντι για σταθερά C στον τυπο (2.3) παίρνουμε συνάρτηση $c(x)$, δηλαδή η «σταθερά C μεταβάλλεται». Για να βρούμε την μερική λύση πρέπει να προσδιορίσουμε την συνάρτηση $c(x)$. Παραγωγίζουμε την συνάρτηση (2.5) και έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{2.6}$$

Αντικαθιστώντας την (2.6) στην εξίσωση (2.1) παίρνουμε

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

άρα

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dc}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

και

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε μια μερική λύση άρα μπορούμε να πάρουμε $C_1 = 0$. Άρα η μερική λύση της (2.1) που ψάχνουμε είναι η

$$y_\mu(x) = e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Συνεπώς η γενική λύση της (2.1) δίνετε απο τον τύπο

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{2.7}$$

Αν θέλουμε τώρα να λύσουμε πρόβλημα αρχικών τιμών (ή πρόβλημα $Cauchy$), προσδιορίζουμε την αυθαίρετη σταθερά στον τύπο (2.7) χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη.

Παράδειγμα 2.1 Να βρεθεί η γενική λύση της

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 \tag{2.8}$$

Λύση. Εδώ

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \;\; f(x) = x^2.$$

Θεωρούμε την αντίστοιχει ομογενή εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι (βλ. Παράδειγμα 1.2)

$$y(x) = Cx.$$

Ψάχνουμε τη μερική λύση της αρχικής εξίσωσης σε μορφή $c(x)x$

$$\frac{d(c(x)x)}{dx} = x\frac{dc}{dx} + c$$

άρα

$$x\frac{dc}{dx} = x^2 \quad \Rightarrow \quad c(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y_\mu = \frac{x^3}{2}.$$

Συνεπώς η γενική λύση της (2.8) είναι η

$$y(x) = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη λύση της (2.8) που επαληθεύει την αρχική συνθήκη $y(1) = 1$ τότε έχουμε απο την γενική λύση

$$y(1) = C + \frac{1}{2} \ \text{ άρα } \ C = \frac{1}{2}.$$

Όπως και στο Παράδειγμα 1.2 παρατηρούμε ότι αρχικές συνθήκες δοσμένες στο $x = 0$ ή δεν προσδιορίζουν την σταθερα (αν θέτουμε $y(0) = 0$) ή δεν δίνουν λύση (αν θέτουμε $y(0) = y_0 \neq 0$).

Πολλές εξισώσεις ανάγουνται στις γραμμικές με κάποιες διαδικασίες (μερικές φορες αρκετά πολυπλοκές). Θα περιοριστούμε με δυο απλές περιπτώσεις.

I. Η εξίσωση $Bernoulli$:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, \quad n \neq 1 \tag{2.9}$$

ανάγεται στην γραμμική εξίσωση με αντικατάσταση $z = y^{1-n}$. Πράγματι

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\big(f(x)y^n - p(x)y\big) =$$
$$(1-n)\big(f(x) - p(x)y^{1-n}\big) = (1-n)\big(f(x) - p(x)z\big)$$

Συνεπώς για την $z(x)$ έχουμε γραμμική εξίσωση

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x).$$

II. Εξίσωση $Riccati$

$$\frac{dy}{dx} + \tilde{p}(x)y + q(x)y^2 = \tilde{f}(x). \tag{2.10}$$

Στην γενική περίπτωση είναι αδύνατον να βρεθεί γενική λύση σε κλειστή μορφή, αν όμως γνωρίζουμε κάποια μερική λύση της έστω την $y_1(x)$ τότε αντικαθιστώντας την $y = y_1 + z$ στην (2.10) έχουμε ότι η $z = y - y_1$ ικανοποιεί την εξίσωση $Bernoulli$

$$\frac{dz}{dx} + [\tilde{p}(x) + 2q(x)y_1(x)]z + q(x)z^2 = 0.$$

Πράγματι

$$\frac{dz}{dx} + [\tilde{p} + 2qy_1]z + qz^2 =$$

$$\frac{dy}{dx} + \tilde{p}y + qy^2 - \big(\frac{dy_1}{dx} + \tilde{p}y_1 + qy_1^2\big) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x) = 0$$

αφού και η $y(x)$ και η $y_1(x)$ ικανοποιούν την (2.10).

Παράδειγμα 2.2. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2} \tag{2.11}$$

Λύση. Προφανώς είναι εξίσωση *Riccati* με

$$\tilde{p}(x) = 0, \quad q(x) = -1, \quad f(x) = -2/x^2.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $y_1(x) = 1/x$ είναι (μερική) λύση της εξίσωσης (2.11). Θέτουμε

$$y = z + \frac{1}{x},$$

και έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} = \Big(z + \frac{1}{x}\Big)^2 - \frac{2}{x^2}$$

ή

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 2\frac{z}{x} \quad \Big(\tilde{p} + 2qy_1 = -\frac{2}{x}, \quad q = -1\Big)$$

που είναι εξίσωση *Bernoulli* (2.9) με

$$p(x) = -2/x, \quad f(x) \equiv 1 \ \text{ και } \ n = 2.$$

Για να την λύσουμε εισάγουμε την συνάρτηση

$$u(x) = \frac{1}{z(x)}$$

η οποία ικανοποιεί την γραμμική εξίσωση

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x}u - 1 \tag{2.12}$$

αφού

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z^2}\big(z^2 + 2\frac{z}{x}\big).$$

Συμφωνα με τον τύπο (2.4) για να βρούμε την γενική λύση της (2.12) πρώτα βρίσκουμε την γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης δηλαδή της

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x} \tag{2.13}$$

που είναι η συνάρτηση

$$u_{\gamma o}(x) = \frac{C}{x^2}$$

(αφού απο την (2.13) έχουμε

$$\ln|u| = -2\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \ln|u|x^2 = C)$$

Προσδιορίζουμε τώρα την μερική λύση της (2.12) εφαρμόζοντας την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών: ψάχνουμε τη μερική λύση u_μ σε μορφή $u_\mu(x) = \frac{c(x)}{x^2}$.

Αντικαθιστώντας αυτή τη συνάρτηση στην (2.12), παίρνουμε

$$\frac{1}{x^2}\frac{dc}{dx} = -1 \quad \Rightarrow \quad c(x) = -\frac{x^3}{3} + C_1$$

όπου την σταθερά C_1 μπορούμε να την πάρουμε να είναι μηδέν. Άρα

$$u_\mu(x) = -x/3$$

και η γενική λύση της (2.12) είναι η εξής

$$u(x) = u_{\gamma o}(x) + u_\mu(x) = \frac{C}{x^2} - \frac{x}{3}.$$

Συνεπώς η γενική λύση της (2.11) είναι

$$y(x) = \frac{3x^2}{C - x^3} + \frac{1}{x}$$

αφού

$$y(x) = z(x) + \frac{1}{x} = \frac{1}{u(x)} + \frac{1}{x} = \frac{3x^2}{3C - x^3} + \frac{1}{x}.$$

□

Τέλος ας δουμε την απλούστερη περίπτωση $p(x) \equiv 0$. Η εξίσωση (2.1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

και η επίλυσή της είναι η ολοκλήρωση της εξίσωσης, δηλαδή

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

Ασκήσεις.

Προσδιορίστε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων γραμμικών εξισώσεων και έπειτα να βρείτε τη λύση του προβλήματος $Cauchy$:

1.
$$\frac{dy}{dx} - \frac{cos\, x}{\sin\, x} y = 2x \sin x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,$$

2.
$$\frac{dy}{dx} + (\sin x)\, y = e^{\cos x}, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2},$$

3.
$$\frac{dy}{dx} = y + \cos\, x, \quad y(0) = 1,$$

4.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}, \quad y(1) = -1.$$

5.
$$\frac{dy}{dx} = x\, \sin x^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

6.
$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

§3. Πλήρεις εξισώσεις

Θεωρούμε την ακόλουθη εξίσωση

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.1}$$

ή

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

ή

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

όπου $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Λέμε ότι η εξίσωση (3.1) είναι *πλήρης* αν υπάρχει μια συνάρτηση $u(x,y)$ τ.ω.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \ \text{ και } \ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y). \tag{3.2}$$

Σε αυτή τη περίπτωση η λύση δίνεται απο τον ακόλουθο τύπο

$$u(x,y(x)) \equiv C. \tag{3.3}$$

Πράγματι, παραγωγίζοντας την (3.3) ως προς x έχουμε

$$0 = \frac{d}{dx}u(x,y(x)) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx}$$

άρα όντως ο τύπος (3.3) μας δίνει την λύση της (3.1).

Αν επιπλέον έχουμε αρχικές συνθήκες $y(x_0) = y_0$, τότε η σταθερά C προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την σχέση

$$u(x_0, y(x_0)) = u(x_0, y_0)) = C.$$

Το ερώτημα είναι πότε υπάρχει τέτοια $u(x,y)$ και αν υπάρχει πως μπορούμε να την προσδιορίσουμε ;

Όπως γνωρίζουμε ένα διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

ονομάζεται συντηρητικό αν υπάρχει μια συνάρτηση $v(x,y,z)$ (το δυναμικό του $\mathbf{F}$) τέτοια ωστε

$$\nabla v \equiv \Big(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\Big) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Αυτο συμβαίνει αν και μόνο αν το διανισματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλαδή

$$curl\mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Αν πάρουμε $\mathbf{F} = (M(x,y), N(x,y), 0)$ τότε

$$curl\mathbf{F} \equiv curl(M(x,y), N(x,y), 0) = \big(0, 0, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\big)$$

και η συνθήκη (3.4) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Συνεπώς η απάντηση στο ερώτημα «πότε υπάρχει τέτοια $u(x, y)$;» είναι: αν και μόνο αν ισχύει η (3.5). Τώρα για να προσδιορίσουμε την $u(x, y)$ χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.2).

Παράδειγμα 3.1. Προσδιορίστε τη λύση της εξίσωσης

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

Λύση. Προφανώς

$$\frac{\partial(x + y + 1)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(x - y^2 + 3)}{\partial x}$$

άρα η εξίσωση είναι πλήρης. Ψάχνουμε τώρα την u. Έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = x + y + 1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x^2}{2} + xy + x + h(y)$$

και συνεπώς

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{dh}{dy}.$$

Απο την άλλη

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = x - y^2 + 3,$$

άρα

$$x + \frac{dh}{dy} = x - y^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad h(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + \tilde{C}$$

και

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2}xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + \tilde{C}.$$

Η ζητούμενη λύση (σε πεπλεγμένη μορφή) είναι

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = C.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών με αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$, τότε η σταθερά C προσδιορίζεται απο την σχέση

$$3x_0^2 + 6x_0y_0 + 6x_0 - 2y_0^3 + 18y_0 = C.$$

Π.χ. αν $y(0) = 0$, τότε $C = 0$.

Παρατήρηση. Όπως γνωρίζουμε αν η $u(x, y)$ είναι συνεχώς παραγωγίσημη συνάρτηση, τότε το διαφορικό της είναι

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Αν

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \ \text{ και } \ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

τότε η (3.1) παίρνει τη μορφή

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

και η παράσταση $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ονομάζεται πλήρες διαφορικό, εδώ οφείλεται και το όνομα πλήρεις εξισώσεις.

Έστω τώρα η εξίσωση (3.1) δεν είναι πλήρης. Αν υπάρχει $\mu(x,y) \geq 0$ τ.ω. η εξίσωση

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{3.6}$$

είναι πλήρης, τότε η $\mu(x,y)$ ονομάζεται *ολοκληροτικός παράγοντας*.

Το ερώτημα είναι πότε υπάρχει τέτοια συνάρτηση μ και αν υπάρχει πως μπορούμε να την προσδιορίσουμε ;

Για να είναι η (3.6) πλήρης πρέπει να ισχύει

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

ή

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

ή

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{3.7}$$

Η εξίσωση (3.7) είναι εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης που εν γένει είναι πιο πολύπλοκη από την (3.1) (με τέτοιες εξισώσεις θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο), όμως σε κάποιες περιπτώσεις η (3.7) μπορεί να απλοποιηθεί ουσιαστικά.

Π.χ. ας δούμε αν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(x)$, δηλαδή η μ να εξαρτάται μονο απο την μεταβλητή x. Σε αυτήν την περίπτωση η (3.7) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{3.8}$$

Συνεπώς για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας που να εξαρτάται μόνο απο την μεταβλητή x, πρέπει η συνάρτηση

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

να είναι συνάρτηση της μεταβλητής x **μόνο**. Έστω

$$\phi(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}, \tag{3.9}$$

τότε, απο την (3.8) έχουμε

$$\mu(x) = Ce^{\int \phi(x)dx}.$$

Αφού θέλουμε να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση μ μπορούμε να πάρουμε $C = 1$.

$$\mu(x) = e^{\int \phi(x)dx}. \tag{3.10}$$

Παράδειγμα 3.2. Προσδιορίστε τη λύση της εξίσωσης

$$(xy^3 + \sin x + 1)dx + x^2y^2\,dy = 0. \tag{3.11}$$

Λύση. Η εξίσωση δεν είναι πλήρης αφού για $M = xy^3 + \sin x + 1$ και $N = x^2y^2$ έχουμε

$$\frac{\partial(xy^3 + \sin x + 1)}{\partial y} = 3xy^2 \neq 2xy^2 = \frac{\partial(x^2y^2)}{\partial x}.$$

Επειδή όμως

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{xy^2}{x^2y^2} = \frac{1}{x} = \phi(x),$$

υπάρχει ολοκληρωτικός παράγων (βλ. (3.10)) $\mu = \mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int \phi(x)dx} = |x|.$$

Άρα για να βρούμε τη λύση πολλαπλασιάζουμε την (3.11) με x ή $(-x)$:

$$(x^2y^3 + x\sin x + x)dx + x^3y^2\,dy = 0. \tag{3.12}$$

Η (3.12) είναι πλήρης. Προσδιορίζουμε την u:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3y^2 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^3 + h(x)$$

όπου $h(x)$ μια τυχαία (παραγωγίσιμη) συνάρτηση, για να την προσδιορίσουμε έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2y^3 + \frac{d\,h}{dx}$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2y^3 + x\sin x + x,$$

άρα

$$\frac{d\,h}{dx} = x\sin x + x \quad \Rightarrow \quad h(x) = -x\cos x + \sin x + \frac{x^2}{2}.$$

Συνεπώς

$$u = \frac{1}{3}x^3y^3 - x\cos x + \sin x + \frac{x^2}{2}$$

και η λύση δίνεται απο την σχέση

$$x^3y^3 - 3x\cos x + 3\sin x + \frac{3x^2}{2} = C$$

ή

$$y(x) = \frac{1}{x}\Big(C + 3x\cos x - 3\sin x - \frac{3x^2}{2}\Big)^{1/3}.$$

Θα δούμε τώρα πιο γενική περίπτωση. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την συνθήκη η οποια θα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής

$$\mu = \mu(z), \quad z = z(x, y)$$

z μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση των x, y. Σε αυτή τη περίπτωση η (3.7) θα πάρει τη μορφή

$$\frac{d\ln\mu(z)}{dz}\, z_y\, M - \frac{d\ln\mu(z)}{dz}\, z_x\, N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\frac{d\ln\mu(z)}{dz} = \frac{N_x - M_y}{z_y M - z_x N}$$

εδώ

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad N_x = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad M_y = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Άρα για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(z)$, πρέπει η σχέση

$$\frac{N_x - M_y}{z_y M - z_x N}$$

να είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής z και σε αυτήν την περίπτωση ο ολοκληρωτηκός παράγοντας προσδιορίζεται απο τον τύπο

$$\mu(z) = e^{\int \phi(z)dz}$$

όπου

$$\phi(z) = \frac{N_x - M_y}{z_y M - z_x N}. \tag{3.13}$$

Αν στην (3.13) θα πάρουμε $z = x$, τότε η (3.13) θα γίνει (3.9).

Παράδειγμα 3.3. Ποια συνθήκη πρέπει να επαληθεύουν οι $M(x, y)$ και $N(x, y)$ για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής

ι.) $\mu = \mu(x - y)$,

ιι.) $\mu = \mu(\frac{x}{y})$.

Λύση. ι.) Αφού $z_x = 1$, $z_y = -1$ και ακολουθώντας την διαδικασία καταλίγουμε στο εξής: για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(x \pm y)$ πρέπει η συνάρτηση (βλ. (3.13))

$$\frac{M_y - N_x}{N - M}$$

να είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής $x \pm y$. Π.χ. για

$$M(x, y) = \frac{y - x}{2} + \frac{(y - x)^3}{6}, \quad N(x, y) = \frac{x - y}{2} + \frac{(y - x)^3}{6}$$

έχουμε

$$\frac{M_y - N_x}{N - M} = x - y \ \ \big(\phi(z) = z \ \text{ με } \ z = x - y\big).$$

ιι.) Αφού $z_x = 1/y$, $z_y = -x/y^2$ και ακολουθώντας την διαδικασία καταλίγουμε στο εξής: για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu = \mu(x/y)$ πρέπει η συνάρτηση

$$\frac{y^2(M_y - N_x)}{xM + yN}$$

να είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x/y.

Π.χ. για $M(x,y) = x + y$, $N(x,y) = -x$ έχουμε

$$\frac{y^2(M_y - N_x)}{xM + yN} = 2\big(\frac{y}{x}\big)^2 \ \ \big(\phi(z) = 2\frac{1}{z^2} \ \text{ με } \ z = \frac{x}{y}\big).$$

Ασκήσεις.

Προσδιορίστε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων γραμμικών εξισώσεων και έπειτα να βρείτε τη λύση του προβλήματος $Cauchy$:

1.
$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0, \ \ y(0) = 1.$$

2.
$$\cos y dx + (y^2 - x \sin y)dy = 0, \ \ y(-1) = 1.$$

3.
$$(xy + y^2 + y)dx + (x^2 + 3xy + 2x)dy = 0.$$

Υπόδειξη: εξετάστε αν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(y)$.

4. Εξετάστε αν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής

$$\mu = \mu(x + y^2)$$

για την εξίσωση

$$(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0.$$

5. Ποια συνθήκη πρέπει να επαληθεύουν οι $M(x,y)$, $N(x,y)$ για να υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής

α)
$$\mu = \mu(x^2 + y^2),$$

β)
$$\mu = \mu(\tfrac{y}{x}).$$

6. Βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Υπόδειξη: Γράψτε την εξίσωση σε μορφή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$$

επειτα προσδιορίστε τον ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.

§4. Γραμμικές εξισώσεις ανώτερης τάξεως

Θα ασχοληθούμε σε αυτήν την παράγραφο με ομογενείς γραμμικές εξισώσεις n τάξης σε κανονική μορφή, δηλαδή με εξισώσεις

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{4.1}$$

(υπενθυμίζουμε οτι με $y^{(k)}$ συμβολίζουμε την παράγωγο k τάξης). Θα υποθέτουμε πάντα ότι οι $p_i(x)$ $i = 1, ..., n$ είναι συνεχείς στο διάστημα που λύνουμε την εξίσωση. Στο πρόβλημα αρχικών τιμών (πρόβλημα $Cauchy$) χρειαζόμαστε n αρχικές συνθήκες:

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_{01}, \;\; ..., \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{0\,n-1} \tag{4.2}$$

όπου $y_0, y_{01}, ..., y_{0\,n-1}$ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί. Συμβολίζοντας με

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$$

μπορούμε να γράψουμε την (4.1) ως

$$L[y] = 0.$$

Το L ονομάζεται γραμμικός τελεστής. Ας δουμε δυο βασικές ιδιότητες του γραμμικού τελεστή L:

(A)

$$L[Cy] \equiv CL[y]$$

(εδώ η αυθαίρετη σταθερα C μπορεί να είναι και μιγαδική). Πράγματι

$$L[Cy] \equiv (Cy)^{(n)} + p_1(x)(Cy)^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)(Cy)' + p_n(x)(Cy) \equiv$$

$$C\big[y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y\big] \equiv CL[y].$$

(B)

$$L[y_1 + y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2]$$

Πράγματι

$$L[y_1 + y_2] \equiv$$

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) \equiv$$

$$\big[y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\big] +$$

$$\big[y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2\big]$$

$$\equiv L[y_1] + L[y_2].$$

Προφανώς απο τις **(A)** και **(B)** συνεπάγεται ότι

$$L\Big[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} C_i L[y_i].$$

Θεώρημα 4.1. *Αν οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (4.1) τότε και ο γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων, δηλαδή η συνάρτηση*

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$$

είναι επίσης λύση της (4.1).

Απόδειξη. Πράγματι, εφόσον

$$L[y_i] = 0 \quad i = 1, ..., n,$$

έχουμε

$$L\Big[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} C_i L[y] = 0.$$

□

Θεώρημα 4.2. *Αν μια μιγαδική συνάρτηση, $y(x) = u(x) + iv(x)$ είναι λύση της εξίσωσης (4.1) τότε και το πραγματικό μέρος $u(x)$ και το φανταστικό μέρος $v(x)$ είναι λύσεις της (4.1).*

(οι $p_1(x), ..., p_n(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις)

Απόδειξη. Έχουμε

$$0 = L[y] = L[u] + iL[v]$$

άρα

$$L[u] = 0 \quad L[v] = 0$$

αφού μιγαδικός αριθμός ισούται με μηδέν σημαίνει ότι και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του είναι μηδεν.

□

Το επόμενο θεώρημα προκύπτει άμεσα απο το θεωρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος $Cauchy$ (ή αρχικών τιμών) που αποδεικνύεται στο μάθημα Σ.Δ.Ε.

Θεώρημα 4.3. *Έστω οτι οι συναρτήσεις $p_1(x), ..., p_n(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $I \subset \mathbf{R}$ που περιέχει το x_0, τότε το πρόβλημα $(4.1), (4.2)$ έχει μοναδική λύση στο I.*

Ορισμός 1. *Λέμε ότι οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες στο διάστημα $[a, b]$ αν υπάρχουν σταθερές $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ τέτοιες ώστε*

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0 \ \ (\textit{το γράφουμε ως} \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0)$$

και για όλα τα $x \in [a, b]$ ισχύει

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \ \ (\text{το γράφουμε ως} \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0).$$

Ορισμός 2. *Λέμε ότι οι συναρτήσεις* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα* $[a,b]$ *αν απο την σχέση*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0 \ \text{ στο } \ [a,b]$$

προκύπτει ότι

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Παράδειγμα 4.1. Οι συναρτήσεις $1, x, x^2, ..., x^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες σε κάθε $[a,b]$.

Πράγματι, έστω

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_{m+1} x^m \equiv 0 \tag{4.3}$$

σε κάποιο διάστημα $[a,b]$. Αν τουλάχιστον κάποιο απο τα α_i είναι διάφορο του μηδενός τότε έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq m$ το οποίο έχει το πολύ m διαφορετικές ρίζες στο $[a,b]$ άρα η σχέση $\alpha_1 + \alpha_2 x + ... + \alpha_{m+1} x^m$ μπορεί να μηδενίζεται το πολύ σε m διαφορετικά σημεία. Συνεπώς απο την (4.3) έπεται ότι $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{m+1} = 0$.

Παράδειγμα 4.2. Οι συναρτήσεις $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}$ με $k_i \neq k_j$ αν $i \neq j$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητες σε κάθε $[a,b]$.

Πράγματι, έστω

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \alpha_3 e^{k_3 x} + ... + \alpha_n e^{k_n x} \equiv 0 \tag{4.4}$$

σε κάποιο διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε οτι υπάρχει τουλάχιστον μια σταθερα, έστω η α_n, που είναι διάφορη του μηδενός. Διαιρούμε την (4.4) δια την $e^{k_1 x}$ και παραγωγίζουμε:

$$\alpha_2(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} + \alpha_3(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_1)x} + ... + \alpha_n(k_n - k_1)e^{(k_n-k_1)x} \equiv 0. \tag{4.5}$$

Διαιρούμε τώρα την (4.5) με $e^{(k_2-k_1)x}$ και πάλι παραγωγίζουμε:

$$\alpha_3(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)e^{(k_3-k_2)x} + ... + \alpha_n(k_n - k_1)(k_n - k_2)e^{(k_n-k_2)x} \equiv 0.$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία καταλήγουμε στη σχέση

$$\alpha_n(k_n - k_1)(k_n - k_2)...(k_n - k_{n-1})e^{(k_n-k_2)x} \equiv 0.$$

Αφού

$$(k_n - k_1)(k_n - k_2)...(k_n - k_{n-1})e^{(k_n-k_2)x} \neq 0$$

αναγκαστικά $\alpha_n = 0$. Άτοπο.

Παράδειγμα 4.3. Οι συναρτήσεις $x, -x, x^2$, είναι γραμμικώς εξαρτημένες σε κάθε $[a,b]$.

Πράγματι,

$$\alpha_1 x + \alpha_2(-x) + \alpha_3 x^2 \equiv 0 \ \ \forall x,$$

με $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 = 0$.

Ορισμός 3. *Βρονσκιανή ενός συστήματος συναρτήσεων $y_1(x), ..., y_n(x)$ ονομάζουμε την εξής ορίζουσα*

$$W(x) = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{Vmatrix}.$$

Θεώρημα 4.4. *Αν οι $n-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y_1(x), ..., y_n(x)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες στο διάστημα $[a, b]$ τότε*

$$W(x) \equiv 0 \ \text{ στο } \ [a, b].$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \equiv 0, \quad x \in [a, b] \tag{4.6}$$

όπου τουλάχιστον μια απο τις σταθερές α_1, ..., α_n είναι διάφορη του μηδενός. Αν θα παραγωγίσουμε την σχέση (4.6) μια φορά, δυο φορές, ..., $n-1$ φορές, πάλι θα έχουμε μηδέν, δηλαδή

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x) &+ \alpha_2 y_2(x) &+ ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) &+ \alpha_2 y_2'(x) &+ ... + \alpha_n y_n'(x) \equiv 0 \\ & \quad . \ . \ . \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) &+ \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) &+ ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Προφανώς για κάθε x_0 απο το διάστημα $[a, b]$ το σύστημα (4.7) είναι αλγεβρικό σύστημα ως προς τα α_1, ..., α_n με **μη** μηδενική λύση (αφού τουλάχιστον μια απο τις σταθερές α_1, ..., α_n είναι διάφορη του μηδενός). Συνεπώς η ορίζουσα του πίνακα ισούται με μηδέν, δηλαδή

$$W(x_0) = 0$$

και αφού το x_0 είναι τυχαίο συμπεραίνουμε οτι

$$W(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

□

Θεώρημα 4.5. *Αν οι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $[a, b]$ συναρτήσεις $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (4.1) (στο διάστημα $[a, b]$), τότε*

$$W(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

(Θυμίζουμε οτι οι $p_i(x)$ $i = 1, ..., n$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ συναρτήσεις.)

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο σημείο $x_0 \in [a, b]$ η Βρονσκιανή μηδενίζεται

$$W(x_0) = 0$$

επιλέγουμε τέτοιες σταθερές α_1, α_2,..., α_n ώστε

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

(4.8) $\quad \ldots$

$$\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

και τουλάχιστον μια από τις σταθερές να είναι διάφορη του μηδενός.

Τούτο είναι εφικτό εφόσον η ορίζουσα τον πίνακα των συντελεστών είναι μηδέν ($W(x_0) = 0$). Η συνάρτηση

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$$

είναι λύση της (4.1) (ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων της (4.1)). Απο (4.8) έχουμε

$$\tilde{y}(x_0) = 0, \quad \tilde{y}'(x_0) = 0, ..., \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{4.9}$$

Προφανώς η $\tilde{y}$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (4.1), (4.9), απο την άλλη και η συνάρτηση ταυτοτικά ίση με το μηδέν είναι λύση του προβλήματος (4.1), (4.9), λαμβάνοντας υπ όψιν ότι το πρόβλημα (4.1), (4.9) εχει μόνο μια λύση (βλ. Θεώρημα 4.3) καταλήγουμε στο ότι $\tilde{y}(x) \equiv 0$ δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0$$

και συνεπώς οι $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Άτοπο. Άρα η Βρονσκιανή δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[a, b]$.

□

Θεώρημα 4.6. *Έστω οτι οι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $[a, b]$ συναρτήσεις $y_1(x), ..., y_n(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (4.1), τότε η γενική λύση της (4.1) (στο ίδιο διάστημα) είναι ο γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων, δηλαδή*

$$y_{\gamma o}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \tag{4.10}$$

όπου C_i $i = 1, ..., n$ αυθαίρετες σταθερές.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το θεώρημα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι ο τύπος (4.10) περιέχει όλες τις λύσεις της εξίσωσης (4.1). Δηλαδή αν θα πάρουμε μια τυχαία λύση $\overline{y}(x)$ της (4.1), πρέπει να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές C_i έτσι ώστε η $\overline{y}(x)$ να γράφεται στη μορφή (4.10). Με $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ θα συμβολίσουμε τις τιμές της συνάρτησης $\overline{y}$ και τις παραγώγους μεχρι τάξεως $n-1$ σε ενα σημείο $x_0 \in (a, b)$ δηλαδή:

$$\alpha_0 = \overline{y}(x_0), \quad \alpha_1 = \overline{y}'(x_0), \quad ... \quad \alpha_{n-1} = \overline{y}^{n-1}(x_0).$$

Θεωρούμε το ακόλουθο αλγεβρικό σύστημα (ως προς C_i):

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = \alpha_0,$$

$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = \alpha_1,$$

(4.11) $\quad \ldots$

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Η ορίζουσα του αλγεβρικού συστήματος (4.11) ισούτε με την Βρονσκιανή $W(x_0)$, άρα είναι διάφορη του μηδενος, συνεπώς το σύστημα (4.11) έχει μοναδική λύση. Έστω $C_1^*, ..., C_n^*$ είναι η (μοναδική) λύση του (4.11). Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^* y_i(x).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$ για την (4.1) με αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = \alpha_0, \;\; y'(x_0) = \alpha_1, \;\; ... \;\; y^{n-1}(x_0) = \alpha_{n-1},$$

το ίδιο και η $\overline{y}(x)$, άρα απο την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (Θεώρημα 4.3) προκύπτει οτι

$$\overline{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i^* y_i(x).$$

□

Παρατηρούμε ότι το Θεωρημα 4.6 ανάγει τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της εξίσωσης (4.1) στον προσδιορισμό των n γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων της (4.1)! Στην γενική περίπτωση η εύρεση αυτών των λύσεων δεν είναι εφικτή, όμως (όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο) για εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές αυτο είναι μια εύκολη υπόθεση.

Ορισμός 4. *Ένα σύστημα n γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων της (4.1) ονομάζεται θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (4.1).*

Ασκήσεις.

1. Έχουμε σύστημα τριών συναρτήσεων

$$(x,\, x^2+1,\, h(x)).$$

Επιλέξτε τρείς συναρτήσεις $h(x)$ ετσι ώστε στο $[-1,1]$ το σύστημα να είναι
α.) γραμμικώς ανεξάρτητο, β.) γραμμικώς εξαρτημένο.

2. Στο σύστημα τριών συναρτήσεων

$$(\sin x,\, e^x,\, h(x))$$

επιλέξτε τρείς συναρτήσεις $h(x)$ ετσι ώστε το σύστημα στο $[0,1]$ να είναι
α.) γραμμικώς ανεξάρτητο, β.) γραμμικώς εξαρτημένο.

3. Αποδείξτε οτι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα $[a,b]$

α.) $$e^{kx}, \;\; xe^{kx}, \;\; x^2e^{kx}, ..., \;\; x^m e^{kx},$$

β.) $$\sin\beta x, \;\; \cos\beta x,$$

4. Μπορεί το θεμελιώδες σύστημα λύσεων μιας εξίσωσης βαθμού n να αποτελείται από
α.) $n-1$ συναρτήσεις; β.) $n+1$ συναρτήσεις;

5. Προσδιορίστε τη συνάρτηση $h(x)$ ε.ω. το σύστημα

$$(e^{-x},\, e^x,\, h(x))$$

να είναι γραμμικώς εξαρτημένο σε κάθε διάστημα $[a,b]$ και η $h(x)$ να μήν είναι γραμμικός συνδυασμός των e^{-x} και e^x ($h(x) \neq C_1e^{-x} + C_2e^x$, $C_1^2 + C_2^2 > 0$).

§5. Γραμμικές Εξισώσεις Με Σταθερούς Συντελεστές

Σε αυτήν την παράγραφο θα μάθουμε πως προσδιορίζουμε το θεμελιώδες σύστημα (δηλαδή τις n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις) μιας ομογενούς γραμμικής εξίσωσης n τάξεως με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή της

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{5.1}$$

όπου a_i $i = 1, ..., n$ σταθερές. Ψάχνουμε τη λύση της (5.1) σε μορφή $y(x) = e^{kx}$, αντικαθιστώντας την συνάρτηση αυτή στην (5.1) έχουμε

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + ... + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} = 0.$$

Διαιρώντας δια την e^{kx} παίρνουμε

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Το πολυώνυμο

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n \tag{5.2}$$

ονομάζεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο*. Προφανώς η συνάρτηση e^{kx} είναι (μερική) λύση της (5.1) αν και μόνο αν ο αριθμός k είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (5.2).

1. Ξεκινάμε με την απλούστερη περίπτωση όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει n διαφορετικές πραγματικές ρίζες (n απλές πραγματικές ρίζες). Δηλαδή k_1, k_2,..., k_n ρίζες του (5.2) τ.ω. $k_i \neq k_j$ για $i \neq j$ και $k_i \in \mathbf{R}$ $\forall i = 1, ..., n$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (5.1)

$$e^{k_1 x}, \ \ e^{k_2 x}, \ \ ... \ \ e^{k_{n-1} x}, \ \ e^{k_n x},$$

οι οποίες αποτελούν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (5.1). Άρα η γενική λύση της (5.1) σε αυτήν την περίπτωση δίνεται από τον τύπο (βλ. Θεώρημα 4.6)

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_{n-1} e^{k_{n-1} x} C_n e^{k_n x}.$$

όπου C_i, $i = 1, ..., n$ αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 5.1 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Λύση. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

είναι $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Παράδειγμα 5.2 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y''' - y' = 0.$$

Λύση. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$k^3 - k = 0$$

είναι $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 1$, συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x.$$

2. Θα δούμε τώρα τη κάνουμε εις την περίπτωση που κάποια ρίζα, έστω η k_1, δεν είναι απλή. Έστω έχει πολλαπλότητα $m \leq n$. Πρέπει να προσδιορίσουμε m γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν σε αυτή την ρίζα.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $k_1 = 0$. Η εξίσωση (5.1) θα πάρει τη μορφή

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-m} y^{(m)} = 0 \tag{5.3}$$

εφόσον το πολυώνυμο που έχει μηδενική ρίζα πολλαπλότητας m πρέπει να έχει τη μορφή

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-m} k^m.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι συναρτήσεις

$$1, \;\; x, \;\; x^2, \;\; ..., \;\; x^{m-1}$$

είναι λύσεις της (5.3). Συνεπώς βρήκαμε m γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν στην μηδενική ρίζα πολλαπλότητας m.

Έστω τώρα έχουμε μια πραγματική ρίζα $k_1 \neq 0$ πολλαπλότητας m. Κάνουμε την εξής αντικατάσταση, εισάγουμε την συνάρτηση

$$z(x) = e^{-k_1 x} y(x) \;\text{ ή }\; y(x) = e^{k_1 x} z(x). \tag{5.4}$$

Για να καταλάβουμε καλλίτερα την ιδέα ας πάρουμε πρώτα $n = 2$, δηλαδή θεωρούμε την εξίσωση

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{5.5}$$

και υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $k^2 + a_1 k + a_2$ έχει διπλή ρίζα $k_1 \neq 0$. Κάνοντας την αντικατάσταση (5.4) έχουμε

$$y' = e^{k_1 x} z' + k_1 e^{k_1 x} z,$$
$$y'' = e^{k_1 x} z'' + 2k_1 e^{k_1 x} z' + k_1^2 e^{k_1 x} z,$$

άρα η εξίσωση που επαληθεύει η z είναι η

$$z'' + (2k_1 + a_1) z' + (k_1^2 + a_1 k_1 + a_2) z = 0 \quad \Rightarrow z'' = 0$$

εφόσον η k_1 είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου $k^2 + a_1 k + a_2$. Οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της $z'' = 0$ είναι οι 1 και x, άρα οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.5) είναι οι

$$e^{k_1 x}, \;\; x\, e^{k_1 x}.$$

Έστω τώρα $n = 3$:

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \tag{5.6}$$

και η k_1 διπλή ή τριπλή ρίζα του πολυωνύμου $k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3$. Κάνοντας την αντικατάσταση (5.4) έχουμε

$$y' = e^{k_1 x} z' + k_1 e^{k_1 x} z,$$
$$y'' = e^{k_1 x} z'' + 2k_1 e^{k_1 x} z' + k_1^2 e^{k_1 x} z,$$

$$y''' = e^{k_1x}z''' + 3k_1e^{k_1x}z'' + 3k_1^2e^{k_1x}z' + k_1^3e^{k_1x}z,$$

άρα η εξίσωση που επαληθεύει η z είναι η

$$z''' + (3k_1 + a_1)z'' + (3k_1^2 + 2a_1k_1 + a_2)z' + (k_1^3 + a_1k_1^2 + a_2k_1 + a_3)z = 0. \tag{5.7}$$

Αν η k_1 είναι διπλή ρίζα τοτε η εξίσωση παίρνε τη μορφή

$$z''' + (3k_1 + a_1)z'' = 0,$$

οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.7) είναι οι 1, x και συνεπώς οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.6) είναι οι

$$e^{k_1x}, \ \ x\,e^{k_1x}.$$

Αν η k_1 είναι τριπλή ρίζα τοτε η εξίσωση παίρνε τη μορφή

$$z''' = 0,$$

και οι τρείς γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.7) είναι οι 1, x, x^2 και συνεπώς οι τρείς γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.6) είναι οι

$$e^{k_1x}, \ \ x\,e^{k_1x}, \ \ x^2e^{k_1x}.$$

Επιστρέφουμε στην εξίσωση n τάξεως. Τωρα δεν είναι δύσκολο να καταλάβουμε (κάνοντας παρόμοια διαδικασία) ότι οι m γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (5.1) που αντιστοιχούν στην μη μηδενική πραγματική ρίζα k_1 πολλαπλότητας m είναι οι

$$e^{k_1x}, \ \ x\,e^{k_1x}, \ \ \ldots \ \ , x^{m-1}e^{k_1x}. \tag{5.8}$$

Παρατηρούμε οτι ο τυπος (5.8) περιεχει και την περίπτωση μηδενικής ρίζας πολλαπλότητας m.

Παράδειγμα 5.3 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Λύση. Προφανώς

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = (k-1)^3$$

αρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τριπλή ριζα $k_{1,2,3} = 1$, συνεπώς το θεμελιώδες σύστημα είναι

$$e^x, \ \ xe^x, \ \ x^2e^x$$

και η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x.$$

3. Περνάμε τωρα στην περίπτωση που το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες. Θα ξεκινίσουμε με απλές μιγαδικές ρίζες. Έστω $k_1 = \alpha + i\beta$ (απλή) ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε και η $\overline{k}_1 = \alpha - i\beta$ είναι επίσης (απλή) ρίζα (εδω $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). Οι λύσεις που αντιστοιχούν σε αυτές τις δυο ρίζες είναι $e^{(\alpha+i\beta)x}$ και $e^{(\alpha+i\beta)x}$, χρησιμοποιώντας τον τύπο $Euler$

$$e^{iz} = \cos\, z + i \sin\, z,$$

έχουμε

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Όπως είχαμε διαπιστώσει αν έχουμε μια μιγαδική λύση της εξίσωσης (5.1) τότε και το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι επίσης λύσεις, συνεπώς οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν στις ρίζες $\alpha \pm i\beta$ είναι οι

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Παράδειγμα 5.4 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = 0.$$

Λύση. Προφανώς οι ρίζες του

$$k^2 + 1 = 0$$

είναι i και $-i$ ($\alpha = 0, \beta = 1$), συνεπώς το θεμελιώδες σύστημα είναι

$$\cos\, x, \quad \sin\, x$$

και η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = C_1\cos\, x + C_2\sin\, x.$$

4. Θα εξετάσουμε την περίπτωση πολλαπλών μιγαδικών ριζών. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μιγαδική ρίζα $k_1 = \alpha + i\beta$ πολλαπλότητας $m \le n/2$. Πρέπει να βρούμε $2m$ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν στις ρίζες $k_1, \overline{k}_1$ (δηλαδή $\alpha \pm i\beta$). Ακολουθώντας την διαδικασία της περίπτωσης 2 (βλ. (5.8)), και λαμβάνοντας υπ όψιν τον τύπο $Euler$ καταλήγουμε στο ότι οι ζητούμενες λύσεις είναι οι εξής:

$$e^{\alpha x}\cos\,\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\,\beta x, \quad ..., \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\,\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\,\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\,\beta x, \quad ..., \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\,\beta x.$$

Το σύστημα αυτο ειναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Παράδειγμα 5.5 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Λύση. Προφανώς οι i και $-i$ είναι δύο διπλές ρίζες του

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0.$$

Συνεπώς το θεμελιώδες σύστημα είναι

$$\cos\, x, \quad \sin\, x, \quad x\cos\, x, \quad x\sin\, x$$

και η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y(x) = (C_1 + C_2x)\cos\, x + (C_3 + C_4x)\sin\, x.$$

Εξίσωση $Euler$

Η εξίσωση της μορφής

$$x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_ny = 0, \quad x > 0$$

ονομάζεται εξίσωση $Euler$ και εύκολα ανάγεται σε γραμμική με αλλαγή μεταβλητής

$$x = e^t \quad (x(t) = e^t).$$

Αν μελετάμε την εξίσωση για $x < 0$, τότε η αντικατάσταση που κάνουμε είναι $x = -e^t$.

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θα περιοριστούμε με την περίπτωση $n = 2$. Έχουμε

$$x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_2 y(x) = 0 \tag{5.9}$$

Παραγωγίζουμε την ταυτότητα $y(t) \equiv y(x)$ ($y(t) \equiv y(x(t))$) ως προς t:

$$y'(t) \equiv y'(x)\frac{dx}{dt} \equiv y'(x)x,$$

παραγωγίζουμε άλλη μια φορα ως προς t:

$$y''(t) \equiv y''(x)\frac{dx}{dt}x + y'(x)\frac{dx}{dt} \equiv y''(x)x^2 + y'(x)x.$$

Άρα

$$a_1 x y'(x) \equiv a_1 y'(t), \quad x^2 y''(x) \equiv y''(t) - y'(x)x \equiv y''(t) - y'(t)$$

και η (5.9) παίρνει τη μορφή

$$y''(t) + (a_1 - 1)y'(t) + a_2 y(t) = 0.$$

Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδη με αλλαγή μεταβλητής $x = e^t$, αντιμετωποιήζεται και η περίπτωση $n > 2$.

Παράδειγμα 5.6 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$x^2 y''(x) + \frac{5}{2} x y'(x) - y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $x = e^t$ και έχουμε

$$y''(t) + \frac{3}{2} y'(t) - y(t) = 0.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$k^2 + \frac{3}{2}k - 1 = 0$$

έχει ρίζες $k_1 = 1/2$, $k_2 = -2$ άρα η γενική λύση είναι

$$y(t) = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-2t}.$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι $t = \ln x$ για $x > 0$, παίρνουμε ότι

$$y(x) = C_1 x^{1/2} + C_2 x^{-2}.$$

Ασκήσεις.

Να βρεθεί η γενική λύση $y(x)$ της εξίσωσης

1.
$$y'' + y' - 2y = 0.$$

2.
$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

3.
$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

4.
$$y'' + 4y = 0.$$

5.
$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0.$$

6.
$$x^2y'' - xy' + y = 0, \quad x > 0.$$

7.
$$y^{(10)} - 2y = 0.$$

8.
$$x^2y''(x) + \frac{5}{2}xy'(x) - y(x) = 0 \text{ για } x < 0.$$

§6. Μη Ομογενείς Γραμμικές Εξισώσεις

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{6.1}$$

την οποία, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό απο την προηγούμενη παράγραφο την γράφουμε ως

$$L[y] = f(x).$$

Όπως και πριν υποθέτουμε ότι οι συντελεστές $p_i(x)$, $i = 1, ..., n$ και το δεύτερο μέρος $f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα όπου μελετάμε την εξίσωση. Από τις ιδιότητες $(\mathbf{A})$ και $(\mathbf{B})$ του τελεστή L (βλ. σελίδα 28) αμέσως προκύπτει ότι

$(\mathbf{\Gamma})$ Αν η $\tilde{y}(x)$ είναι λύση της (4.1) και η $y_1(x)$ - λύση της (6.1), τότε η $y(x) = \tilde{y}(x) + y_1(x)$ είναι λύση της (6.1).

Πράγματι

$$L[y] = L[\tilde{y}] + L[y_1] = 0 + f(x) = f(x).$$

□

$(\mathbf{\Delta})$ Αν η $y_i(x)$ είναι λύση της $L[y_i] = f_i(x)$, $i = 1, ..., m$, τότε η

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$$

είναι λύση της

$$L[y] = \sum_{i=1}^{m} C_i f_i(x),$$

όπου οι C_i όπως πάντα αυθαίρετες σταθερές.

Πράγματι

$$L[y] = L[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i] = \sum_{i=1}^{m} L[C_i y_i] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[y_i] = \sum_{i=1}^{m} C_i f_i.$$

□

$(\mathbf{E})$ Αν η συνάρτηση $y(x) = u(x) + iv(x)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$L[y] = g(x) + ih(x),$$

τότε

$$L[u] = g(x), \quad L[v] = h(x)$$

(οι συντελεστές p_i είναι πραγματικές συναρτήσεις)

Πράγματι,

$$L[y] = L[u + iv] = L[u] + iL[v] = g(x) + ih(x)$$

άρα

$$L[u] = g(x), \quad L[v] = h(x).$$

□

Θεώρημα 6.1 *Η γενική λύση της (6.1) ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της (4.1) και της μερικής λύσης της (6.1).*

Παρατήρηση. Το θεώρημα ανάγει τον προσδιορισμό της γενικής λύσης της (6.1) στον προσδιορισμό του θεμελιώδους συστήματος της (4.1) και της μερικής λύσης της (6.1).

Απόδειξη (του Θεωρήματος 6.1) Παρομοίως με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.6 πρέπει να αποδείξουμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την (6.1) με τυχαίες αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = \alpha_0, \;\; y'(x_0) = \alpha_1, \;\; ..., \;\; y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \tag{6.2}$$

για τυχαίο $x_0 \in [a, b]$, μπορεί να γραφτεί σε μορφή

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + y_\mu(x) \tag{6.3}$$

όπου $y_1, ..., y_n$ θεμελιώδες σύστημα της (4.1), και y_μ μερική λύση της (6.1). Δηλαδή έχοντας το θεμελιώδες σύστημα, τη μερική λύση και τις συνθήκες (6.2) θέλουμε να προσδιορίσουμε (μονοσήμαντα) τις σταθερές ετσι ωστε η (6.3) να είναι λύση του προβλήματος (6.1), (6.2).

Οι σταθερές C_i προσδιορίζονται μονοσήμαντα από το εξής αλγεβρικό σύστημα

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x_0) = y_0 - y_\mu(x_0),$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i'(x_0) = y_{01} - y_\mu'(x_0),$$

$$\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} - y_\mu^{(n-1)}(x_0),$$

εφόσον η ορίζουσα του πίνακα ισούται με $W(x_0) \neq 0$.

□

Παράδειγμα 6.1 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' - y = x \tag{6.4}$$

Λύση. Για να προσδιορίσουμε το θεμελιώδες σύστημα (θ.ς.) λύσεων της

$$y'' - y = 0$$

κατασκευάζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρίσκουμε τις ρίζες:

$$k^2 - 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; k_1 = 1, \;\; k_2 = -1.$$

Συνεπώς το θ.ς. αποτελείται από e^x και e^{-x}. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $y_\mu(x) = -x$ είναι μερική λύση της (6.4), άρα η γενική λύση της (6.4) είναι η

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών με

$$y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \tag{6.5}$$

τότε έχουμε

$$0 = y(0) = C_1 + C_2 - 0, \quad 1 = y'(0) = C_1 - C_2 - 1$$

άρα $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ και η λύση του προβλήματος (6.4), (6.5) είναι

$$y(x) = e^x + e^{-x} - x.$$

Προφανώς δεν είναι πάντα τόσο εύκολο να μαντέψουμε την μερική λύση μιας μη ομογενούς εξίσωσης όπως το κάναμε στο παράδειγμα 6.1, για αυτό θα αναπτύξουμε μια μέθοδο προσδιορισμού μερικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης βάσει της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς. Στην περίπτωση εξίσωσης πρώτης τάξης αυτό το έχουμε κάνει στην παράγραφο 2.

Μέθοδος Μεταβαλλόμενων Σταθερών

Ψάχνουμε τη μερική λύση της (6.1) σε μορφή

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x) \tag{6.6}$$

όπου $y_1,\dots\ y_n$ είναι το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (4.1). Ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $c_i(x)$ έτσι ώστε η (6.6) να είναι λύση της (6.1).

Προφανώς

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x),$$

θέλουμε οι $c_i(x)$ $i = 1, ..., n$ να είναι τέτοιες ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0,$$

τότε

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x)$$

και

$$y''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x).$$

Θα βάλουμε έναν ακόμα περιορισμό στις $c_i(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0,$$

τότε

$$y''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x)$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία φτάνουμε στην

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-1)}(x)$$

απαιτώντας

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(m)}(x) = 0, \tag{6.7}$$

για $m = 0, 1, ..., n-2$ (όχι για $m = n-1$). Τέλος

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x)$$

Αντικαθιστώντας την (6.6) στην (6.1) και λαμβάνοντας υπ όψιν τις (6.7) καταλήγουμε στην

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} +$$
$$p_1 \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)} + p_2 \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-2)} + ... + p_{n-1} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i' + p_n \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \equiv$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \big[y_i^{(n)} + p_1 y_i^{(n-1)} + p_2 y_i^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y_i' + p_n y_i \big] \equiv$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)}.$$

Συνεπώς για να επαληθεύσουμε την (6.1) πρέπει να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = f(x). \tag{6.8}$$

Συνοψίζοντας συμπεραίνουμε ότι οι $c_i(x)$ πρέπει να επαληθεύουν τις (6.7),(6.8). Ας τις ξαναγράψουμε τις σχέσεις αυτές αναλυτικά:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0, \\
\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0, \\
\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i''(x) = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0,
\end{gathered} \tag{6.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = f(x).$$

Εφόσον η ορίζουσα του πίνακα συντελεστών του συστήματος (6.9) είναι η Βρονσκιανή του θεμελιώδους συστήματος της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης καταλήγουμε στο ότι το σύστημα (6.9) έχει μοναδική λύση και έτσι προσδιορίζουμε τις $c_i(x)$, $i = 1, ..., n$.

Παράδειγμα 6.2 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad x \in [a, b] \tag{6.10}$$

Λύση. Προφανώς απαιτούμε το διάστημα $[a, b]$ να μην περιέχει σημεία μηδενισμού της συνάρτησης $\cos x$. Για να προσδιορίσουμε το θεμελιώδες σύστημα λύσεων της $y'' + y = 0$ κατασκευάζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και βρίσκουμε τις ρίζες:

$$k^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = i, \quad k_2 = -i.$$

Συνεπώς το θ.ς. αποτελείται απο $\cos x$ και $\sin x$.

Ψάχνουμε τώρα την μερική λύση της (6.10) σε μορφή

$$y(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$

Έχουμε (βλ. (6.9))

$$c_1'(x) \cos x + c_2' \sin x = 0,$$
$$-c_1'(x) \sin x + c_2' \cos x = \frac{1}{\cos x},$$

άρα

$$c_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_2'(x) = 1,$$

Δηλαδή

$$c_1(x) = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1, \quad c_2(x) = x + \tilde{C}_2.$$

Αφού ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε μερική (κάποια) λύση μπορούμε να πάρουμε $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$. Συνεπώς η μερική λύση της (6.10) είναι

$$y_\mu(x) = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

και η γενική λύση της (6.10) είναι η

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Αν ψάχνουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

τότε

$$0 = y(0) = C_1, \quad 0 = y'(0) = C_2.$$

Ας πάρουμε γενικό δεύτερο μέρος για την (6.10)

Παράδειγμα 6.3 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = f(x) \quad x \in [a, b] \tag{6.11}$$

Λύση. Το θ.ς. αποτελείται απο $\cos x$ και $\sin x$. Ψάχνουμε τώρα την μερική λύση της (6.11) σε μορφή

$$y(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x.$$

Έχουμε

$$c_1'(x)\cos x + c_2'\sin x = 0,$$
$$-c_1'(x)\sin x + c_2'\cos x = f(x),$$

συνεπώς

$$c_1'(x) = -f(x)\sin x \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = -\int_0^x f(\xi)\sin\xi\, d\xi,$$
$$c_2'(x) = f(x)\cos x \quad \Rightarrow \quad c_2(x) = \int_0^x f(\xi)\cos\xi\, d\xi.$$

Άρα έχούμε ότι η γενική λύση της (6.11) ισούται με

$$y(x) = \int_0^x f(\xi)\big[\cos\xi \sin x - \sin\xi \cos x\big]d\xi + C_1\cos x + C_2\sin x =$$
$$\int_0^x f(\xi)\sin(x-\xi)d\xi + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Παρατηρούμε ότι ο προσδιορισμός της γενικής λύσης της (6.1) ουσιαστικά ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό του θεμελιώδους συστήματος της (4.1), εφόσον το θεμελιώδες σύστημα μας δίνει και την γενική λύση της (4.1) (γραμμικός συνδυασμός) αλλά και την μερική λύση της (6.1) (μεταβαλλώμενες σταθερές).

Ασκήσεις.

Να βρεθεί η γενική λύση $y(x)$ της εξίσωσης χρησιμοποιώντας την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών.

1.
$$y'' - y = x.$$

2.
$$y'' + y = \tfrac{\cos x}{\sin x}.$$

3.
$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1.$$

4.
$$y'' - 3y' + 2y = \tfrac{1}{1+e^{-x}}.$$

5.
$$y'' + 4y = f(x)$$

οπου $f(x)$ τυχαία συνεχής συνάρτηση.

§7. Μη Ομογενείς Γραμμικές Εξισώσεις Με Σταθερούς Συντελεστές

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Θα προτείνουμε μια άλλη μέθοδο προσδιορισμού της μερικής λύσης χωρίς την χρίση του θεμελιώδους συστήματος. Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι εν γένει είναι πιο απλή σε σχέση με την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών, το μειονέκτημα είναι ότι εφαρμόζεται μόνο για εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και για δεύτερο μέρος $f(x)$ συγκεκριμένης μορφής.

Μέθοδος των προσδιοριζόμενων συντελεστών

Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση η $f(x)$ να είναι πολυώνυμο βαθμού s.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y =$$

$$A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s \tag{7.1}$$

όπου $A_0 \neq 0,\ \ A_1,\ \ ...,\ \ A_{s-1},\ \ A_s$ δοσμένες σταθερές. Έστω $a_n \neq 0$, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπαρχει μερική λύση της μορφής

$$B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_{s-1} x + B_s. \tag{7.2}$$

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές $B_0,\ \ B_1,\ \ ...,\ \ B_{s-1},\ \ B_s$ αντικαθιστούμε την (7.2) στην εξίσωση (7.1). Εφόσον $a_n \neq 0$, απο τις σχέσεις

$$\begin{gathered} a_n B_0 x^s = A_0 x^s, \\ [a_n B_1 + s a_{n-1} B_0] x^{s-1} = A_1 x^{s-1}, \\ [a_n B_2 + (s-1) a_{n-1} B_1 + s(s-1) a_{n-2} B_0] x^{s-2} = A_2 x^{s-2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n B_s + ... = A_s, \end{gathered}$$

ευκολα προσδιορίζουμε τους συντελεστές $B_0, ..., B_s$.

Προσοχή! Ακόμα και αν κάποια (ή όλα) απο τα $A_1,\ A_2,\ ...\ A_s$ είναι μηδέν τη μερική λύση την ψάχνουμε σε μορφή (7.2).

Παράδειγμα 7.1 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = x^2 + x.$$

Λύση. Ψάχνουμε την μερική λύση σε μορφή

$$y_\mu = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$2B_0 + B_0 x^2 + B_1 x + B_2 = x^2 + x,$$

άρα $B_0 = 1,\ \ B_1 = 1,\ \ B_2 = -2$. Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y(x) = C_1 \cos\, x + C_2 \sin\, x + x^2 + x - 2.$$

Έστω τώρα

$$a_n = a_{n-1} = ... = a_{n-m+1} = 0$$

για κάποιο $m < n$ και $a_{n-m} \neq 0$. Η (7.1) θα πάρει τη μορφή

$$(7.3)\quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-m} y^{(m)} = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s.$$

Για την συνάρτηση $z = y^{(m)}$ έχουμε

$$(7.4)\quad z^{(n-m)} + a_1 y^{(n-m-1)} + ... + a_{n-m} z = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s,$$

άρα υπάρχει μερική λύση της (7.4) της μορφής

$$B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_{s-1} x + B_s.$$

Για να παρουμε την y ολοκληρώνουμε την z m φορές, συνεπώς η (7.3) έχει μερική λύση της μορφής

$$x^m \big(\tilde{B}_0 x^s + \tilde{B}_1 x^{s-1} + ... + \tilde{B}_{s-1} x + \tilde{B}_s\big).$$

Παράδειγμα 7.2 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y' = x - 2.$$

Λύση. Ψάχνουμε την μερική λύση σε μορφή

$$y(x) = x\big(B_0 x + B_1\big).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$2B_0 + 2B_0 x + B_1 = x - 2 \;\text{ άρα }\; B_0 = 1/2, \quad B_1 = -3.$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 - 3x.$$

Θεωρούμε τώρα πιο γενική περίπτωση

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y =$$

$$(7.5)\qquad e^{\lambda x}\big(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s\big)$$

όπου οι αριθμοί $\lambda, A_0, ..., A_s$ εν γένει μπορούν να είναι και μιγαδικοί. Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θα πάρουμε την περίπτωση $n = 2$:

$$(7.6)\qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{\lambda x}\big(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s\big).$$

Η αντικατάσταση

$$y(x) = e^{\lambda x} z(x)$$

ανάγει την (7.6) στην (7.1). Πράγματι

$$y' = e^{\lambda x} z' + \lambda e^{\lambda x} z, \quad y'' = e^{\lambda x} z'' + 2\lambda e^{\lambda x} z' + \lambda^2 e^{\lambda x} z,$$

άρα η (7.6) παίρνει τη μορφη

$$z'' + (2\lambda + a_1) z' + (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) z = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_{s-1} x + A_s.$$

Έχουμε την προηγούμενη περίπτωση. Συνεπώς αν ο αριθμός λ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \neq 0$, τότε ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_{s-1} x + B_s,$$

αν είναι απλή ρίζα ($\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, $2\lambda + a_1 \neq 0$), τότε ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$x\big(B_0x^s + B_1x^{s-1} + ... + B_{s-1}x + B_s\big),$$

αν είναι διπλή ρίζα ($\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 2\lambda + a_1 = 0$), τότε ψάχνουμε τη μερική λύση σε μορφή

$$x^2\big(B_0x^s + B_1x^{s-1} + ... + B_{s-1}x + B_s\big).$$

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, με αντικατάσταση $y(x) = e^{\lambda x}z(x)$, αντιμετοπίζεται και η περίπτωση $n > 2$ και ο κανόνας είναι ο εξής:

(I) Αν ο αριθμός λ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε ψάχνουμε την μερική λύση της (7.5) σε μορφή

$$y(x) = e^{\lambda x}\big(B_0x^s + B_1x^{s-1} + ... + B_{s-1}x + B_s).$$

(II) Αν ο αριθμός λ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πολλαπλότητας m, τότε ψάχνουμε την μερική λύση της (7.5) σε μορφή

$$y(x) = x^m e^{\lambda x}\big(B_0x^s + B_1x^{s-1} + ... + B_{s-1}x + B_s).$$

Παρατηρούμε οτι αν οι αριθμοί $\lambda, A_0, ..., A_s$ είναι μιγαδικοί, τότε το πραγματικό μέρος της $y(x)$ ισούται με

$$x^m e^{px}\big[\tilde{P}_s(x)\cos qx + \tilde{Q}_s(x)\sin qx\big]$$

οπου $\lambda = p + iq$ και $\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ είναι πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές (με $m = 0$ αν λ δεν είναι ρίζα του χ. π.).

Παράδειγμα 7.3 Να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης

$$y'' + 9y = e^{5x}.$$

Λύση. Το 5 δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, άρα ψάχνουμε την μερική λύση σε μορφή

$$y(x) = B_0e^{5x}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση θα πάρουμε

$$25B_0 + 9B_0 = 1 \ \text{ άρα } \ B_0 = 1/34.$$

Συνεπώς η μερική λύση είναι

$$y(x) = \frac{1}{34}e^{5x}.$$

Παράδειγμα 7.4 Να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης

$$y'' - y = e^x(x^2 - 1).$$

Λύση. Ο αριθμός 1 είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, άρα ψάχνουμε την μερική λύση σε μορφή

$$y = xe^x\big(B_0x^2 + B_1x + B_2\big).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$e^x\big[6B_0x^2 + (4B_1 + 6B_0)x + 2B_2 + 2B_1\big] = e^x(x^2 - 1)$$

άρα $B_0 = 1/6, \;\; B_1 = -1/4, \;\; B_2 = -1/4$. Συνεπώς η μερική λύση είναι

$$y(x) = xe^x\big(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\big).$$

Περνάμε τώρα στην πιο γενική περίπτωση όπου μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των προσδιοριζόμενων συντελεστών.

Θεωρούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$(7.7) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = e^{px}\Big(P_s(x)\cos qx + Q_s(x)\sin qx\Big).$$

Εδώ $P_s(x)$ και $Q_s(x)$ πολυώνυμα, όπου το ένα απο αυτά είναι βαθμού s και το άλλο βαθμου $\leq s$. Απο τον τύπο $Euler$ (βλ. σελίδα 36) έχουμε

$$\cos\, qx = \frac{e^{iqx} + e^{-iqx}}{2}, \quad \sin\, qx = \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{2i}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις γράφουμε την (7.7) ως εξής

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y =$$

$$(7.8) \qquad e^{(p+iq)x}R_s(x) + e^{(p-iq)x}\overline{R}_s(x),$$

όπου

$$R_s(x) = \frac{P_s(x) - iQ_s(x)}{2}, \quad \overline{R}_s(x) = \frac{P_s(x) + iQ_s(x)}{2}$$

Την (7.8) την «σπάμε» σε δυο εξισώσεις (βλ. $(\mathbf{\Delta})$ σελ. 36):

$$(7.9_1) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = e^{(p+iq)x}R_s(x),$$

$$(7.9_2) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = e^{(p-iq)x}\overline{R}_s(x),$$

και τις λύνουμε όπως την (7.5). Παρατηρούμε ότι

$$e^{(p+iq)x}R_s(x) = F(x) + iG(x),$$
$$e^{(p-iq)x}\overline{R}_s(x) = F(x) - iG(x),$$

οπου

$$F(x) = \frac{e^{px}}{2}\big(P_s(x)\cos qx + Q_s(x)\sin qx\big),$$
$$G(x) = \frac{e^{px}}{2}\big(P_s(x)\sin qx - Q_s(x)\cos qx\big).$$

Αν η συνάρτηση $y_1(x) = u(x) + iv(x)$ είναι μερική λύση της (7.9_1) τότε η $\overline{y}_1(x) = u(x) - iv(x)$ είναι μερική λύση της (7.9_2). Πράγματι (βλ. (**E**) σελίδα 40)

$$L[u] = F, \;\; L[v] = G \quad \Leftrightarrow \quad L[u + iv] = F + iG, \;\; L[u - iv] = F - iG.$$

Η μερική λύση της (7.8) είναι το άθροισμα της μερικής λύσης της (7.9_1) και της μερικής λύσης της (7.9_2) άρα η $2u(x)$. Συνεπώς (λαμβάνοντας υπ οψιν την περίπτωση της εξίσωσης (7.5)) καταλήγουμε στο εξής:

Γενικός κανόνας:

(I) Αν ο αριθμός $p + iq$ (ή $p - iq$) δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τότε ψάχνουμε την μερική λύση της (7.7) σε μορφή

$$y(x) = e^{px}\big[\tilde{P}_s(x)\cos qx + \tilde{Q}_s(x)\sin qx\big]. \tag{7.10}$$

(II) Αν ο αριθμός $p+iq$ (ή $p-iq$) είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πολλαπλότητας m, τότε ψάχνουμε την μερική λύση της (7.7) σε μορφή

$$y(x) = x^m e^{px}\big[\tilde{P}_s(x)\cos qx + \tilde{Q}_s(x)\sin qx\big]. \tag{7.11}$$

Εδώ $\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ πολυώνυμα βαθμού s με πραγματικούς συντελεστές.

Προσοχή! Αν κάποιο απο τα πολυώνυμα P_s ή Q_s στην (7.7) είναι βαθμού $< s$, ακόμα και αν είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν, τη λύση τη ψάχνουμε σε μορφή (7.10) ((7.11)).

Παράδειγμα 7.5 Να βρεθεί η μερική λύση της εξίσωσης

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$$

Λύση. Προφανώς ο αριθμός $\pm 2i$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $k^2 + 4k + 4$, άρα ψάχνουμε την μερική λύση σε μορφή

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε

$$8B\cos 2x - 8A\sin 2x = \cos 2x,$$

άρα $B = 1/8, \quad A = 0$. Συνεπώς η μερική λύση είναι

$$y(x) = \frac{1}{8}\sin 2x.$$

Παράδειγμα 7.6 Υπάρχει μερική λύση της εξίσωσης

$$y'''' + 2y'' + y = \sin x$$

της μορφής

$$y = x^2(A\cos 2x + B\sin 2x)?$$

Λύση. Εφόσον ο αριθμός i $(-i)$ είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $k^4 + 2k^2 + 1$, συνεπώς ναι, υπάρχει.

Σημαντική Παρατήρηση! Απο την ιδιότητα $(\boldsymbol{\Delta})$ (βλ. σελίδα 40) προκύπτει ότι αν θέλουμε να βρούμε τη μερική λύση της εξίσωσης

$$L[y] = \sum_{i=1}^{n} f_i(x),$$

αρκεί να βρούμε τις μερικές λύσεις των εξισώσεων

$$L[y] = f_1(x), \quad L[y] = f_2(x), \quad ..., \quad L[y] = f_n(x)$$

και μετά να πάρουμε το άθροισμα. Ανάλογα με την f_i εφαρμόζουμε ή την μέθοδο των προσδιοριζόμενων συντελεστών ή την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών.

Παράδειγμα 7.8 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} + x^2 + 1.$$

Λύση. Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι
$$y_{\gamma o}(x) = C_1 \cos\, x + C_2 \sin\, x.$$
Η μερική λύση της
$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$
είναι (βλ. παράδειγμα 6.2)
$$y_{\mu 1}(x) = \cos\, x \ln|\cos\, x| + x \sin\, x$$
(εδώ χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών).

Η μερική λύση της
$$y'' + y = x^2 + 1$$
είναι
$$y_{\mu 2}(x) = x^2 - 1$$
(εδώ χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο των προσδιοριζόμενων συντελεστών).

Συνεπώς η γενική λύση είναι
$$y(x) = C_1 \cos\, x + C_2 \sin\, x + \cos\, x \ln|\cos\, x| + x \sin\, x + x^2 - 1.$$

Παράδειγμα 7.9 Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης
$$x^2 y'' + xy' + y = \ln^3 x + \ln x \quad x > 0.$$

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $x = e^t$. Για $y(t)$ έχουμε
$$y''(t) + y(t) = t^3 + t.$$
Άρα
$$y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + t^3 - 5t$$
και η λύση είναι
$$y(x) = C_1 \sin \ln x + C_2 \cos \ln x + \ln^3 x - 5 \ln x.$$

Ασκήσεις.

Να βρεθεί η γενική λύση των εξισώσεων

1. $y'' + 4y = \cos 2x.$

2. $y'' + 4y' + 4y = \sin 2x.$

3. $y'' - 3y' + 2y = e^x.$

4. $y''' - y = x^3 - 1.$

5. $y'' + y = \dfrac{\cos\, x}{\sin\, x} + xe^x \sin\, x.$

6. $x^2 y'' + xy' + 4y = 2\ln^3 x - 1, \quad x > 0.$

7. $y'' + y = f(x) + e^{2x}(x^2 + 1).$

§8 Δυο Απλές Εφαρμογές

Στην Εισαγωγή αναφέραμε δυο φαινόμενα η επίλυση των οποιων ανάγεται στην επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Θα δώσουμε αλλα δυο παραδέιγματα φαινομένων που επίσης ανάγονται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

I. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα: Θέλουμε να βρούμε το σχήμα που πρέπει να έχει ενας καθρέφτης ο οποίος αντανακλά όλες τις ακτίνες του φωτός που εξέρχονται απο ένα συγκεκριμμένο σημείο σε ακτίνες παράλληλες με την δοσμένη κατέυθυνση.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε οτι η δοσμένη κατέυθυνση είναι ο άξονας x και οι ακτίνες εξέρχονται απο το σημείο $(0,0,0)$. Θεωρούμε την τομή της ζητούμενης επιφάνειας με το επίπεδο $x\,y$ (βλ. σχήμα 2α, σελίδα 105). Έστω $y > 0$, προφανώς

$$\tan\phi = \frac{|MM'|}{|NM'|} = \frac{y}{x + |NO|}.$$

Παρατηρούμε οτι $O\hat{M}N = O\hat{N}M$, διότι η γωνία πρόσπτωσης ($O\hat{M}N$) ισούται με τη γωνία ανάκλασης ($O\hat{N}M$) και συνεπώς $|NO| = |OM| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Αρα (αφού $y' = \tan\phi$) καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}$$

την οποια την έχουμε λύσει και μάλιστα με δυο διαφορετικούς τρόπους (βλ. §1 άσκηση 6 και §3 άσκηση 6), η λύση δίνεται απο τον τύπο

$$y^2 = 2C\,x + C^2 \quad (C - \text{σταθερά})$$

που είναι μια παραβολή. Συνεπώς ο ζητούμενος καθρέφτης προκύπτει απο την περιστροφή της καμπύλης αυτής γύρο απο τον άξονα x, δηλαδή είναι ένα παραβολοειδές (βλ. σχήμα 2β, σελίδα 105).

II. Το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου.

Μια σφαίρα αφήνεται να ολισθήσει χωρίς τριβή υπό την επίδραση της βαρύτητας απο ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ σε ένα σημείο $B(x_2, y_2)$ κατά μήκος μιας «τσουλίθρας» που ορίζεται απο μια καμπύλη $y = y(x)$. Εδω $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$ (βλ. σχήμα 3, σελίδα 105). Το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου είναι: ποια καμπύλη δίνει τον ταχύτερο χρόνο καθόδου ;

Το πρόβλημα αυτό ανάγεται (με χρήση του Λογισμού Μεταβολών) στην εξίσωσης

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{C\sqrt{y_1 - y}}.$$

Η λύση της εξίσωσης (η οποία μας δίνει και την απάντηση στο ερώτημα) είναι η καμπύλη που ονομάζεται κυκλοειδές.

Κεφάλαιο ΙΙ.
Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους

§0 Εισαγωγή

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε με μερικά παράδειγμα από την κλασική Φυσική.

Παράδειγμα I. Η δύναμη βαρύτητας $\mathbf{F}$ που προκαλείται από μια σημειακή μάζα M στη θέση $(0,0,0)$ και ασκείται πάνω σε ένα σωματίδιο μάζας m στη θέση (x,y,z), δίνεται, συμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, από την σχέση

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}\mathbf{r}$$

ή

$$\mathbf{F} = \Big(-\gamma \frac{M\,m}{r^3}x, -\gamma \frac{M\,m}{r^3}y, -\gamma \frac{M\,m}{r^3}z \Big)$$

εδώ $\gamma > 0$ μια σταθερά, $\mathbf{r} = (x,y,z)$ και $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Το διανυσματικο πεδίο $\mathbf{F}$ ειναι συντηρητικό δηλαδή υπάρχει μια συνάρτηση $u(x,y,z) : \mathbf{R}^3 \to R$ τέτοια ώστε $\nabla u = \mathbf{F}$ ή

$$u_x = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}x, \;\; u_y = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}y, \;\; u_z = -\gamma \frac{M\,m}{r^3}z.$$

Προφανώς

$$u(x,y,z) = \gamma \frac{M\,m}{r}.$$

Επίσης έχουμε

$$u_{xx} = -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}\Big),$$
$$u_{yy} = -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5}\Big),$$
$$u_{zz} = -\gamma\, M\, m\Big(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}\Big),$$

συνεπώς

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{0.1}$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται **εξίσωση Laplace**.

Θα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta\, u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \;\text{ ή }\; \Delta\, u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = u_{x_1 x_1} + ... + u_{x_n x_n}.$$

Για $n=2$ αντί για x_1, x_2 θα γράφουμε x, y ($u_{xx} + u_{yy} = 0$) και για $n=3$ αντί για x_1, x_2, x_3 θα γράφουμε x, y, z ($u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$). Η εξίσωση *Laplace* παίρνει τη μορφή

$$\Delta u = 0. \tag{0.1'}$$

Έστω τώρα η μάζα M είμαι κατανεμημένη σε μία μπάλα $\mathbf{B}(\mathbf{0}, R)$ με κέντρο στο σημείο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα R τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $u(x, y, z)$ επαληθεύει την εξίσωση

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -4\pi\rho \;\text{ ή }\; \Delta u = -4\pi\rho \tag{0.2}$$

όπου η συνάρτηση $\rho(x, y, z)$ είναι η πυκνότητα της μάζας στο σημείο (x, y, z) (οι υπολογισμοί εδώ είναι αρκετά ογκώδεις). Η εξίσωση (0.2) ονομάζεται **εξίσωση Poisson**. Προφανώς εκτός της σφαίρας $\mathbf{B}(\mathbf{0}, R)$ όπου $\rho(x, y, z) \equiv 0$ η (0.2) γίνεται (0.1).

Τις ίδιες εξισώσεις επαληθεύει και το δυναμικό ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Παράδειγμα II. Ας δώσουμε ένα άλλο παράδειγμα όπου εμφανίζεται η εξίσωση $Laplace$. Έστω $\mathbf{u} = (u, v, w)$ διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, υποθέτουμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη και το ρευστό ασυμπίεστο δηλαδή

$$curl\,\mathbf{u} = 0, \quad div\,\mathbf{u} = 0$$

όπου

$$curl\,\mathbf{u} \equiv (w_y - v_z)i + (u_z - w_x)j + (v_x - u_y)k = 0$$

και

$$div\,\mathbf{u} \equiv u_x + v_y + w_z$$

(σχετικά με την σχέση $div\,\mathbf{u} = 0$ βλέπε το παράδειγμα IV). Συνεπώς έχουμε τις εξισώσεις

$$w_y = v_z, \;\; u_z = w_x, \;\; v_x = u_y$$

και

$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

Παραγωγίζουμε την τελευταία ως προς x

$$u_{xx} + v_{yx} + w_{zx} = 0$$

από την άλλη

$$v_{yx} = u_{yy}, \;\; w_{zx} = u_{zz},$$

συνεπώς

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Παρομοίως

$$v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = 0,$$

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0.$$

Βλέπουμε ότι και οι τρεις συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{u}$ επαληθεύουν την εξίσωση $Laplace$.

Παράδειγμα III. Έστω $u(t, x, y, z)-$ θερμοκρασία στο σημείο $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ στη χρονική στιγμή t. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz,$$

όπου $\rho > 0$ πυκνότητα και $c > 0$ θερμοχωρητικότητα, μας δίνει την συνολική θερμότητα που περιέχεται στο Ω. Σύμφωνα με τον νόμο $Fourier$ η θερμότητα ρέει από τα θερμά προς τα ψυχρά με βάση το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = -\kappa \nabla u$ όπου $\kappa > 0$ είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας. Από τον νόμο διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι η μεταβολή της συνολικής θερμότητας καθορίζεται από την ροή της θερμότητας διαμέσου του συνόρου $\partial\Omega$ και από της πηγές θερμότητας f που βρίσκονται στο Ω, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz = \int_{\partial\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nu\, ds + \int_\Omega f\, dxdydz,$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του Ω. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\, c\, u\, dxdydz = \int_\Omega div(\kappa\nabla u)\, dxdydz + \int_\Omega f\, dxdydz$$

ή

$$\int_\Omega \Big((\rho\, c\, u)_t - div(\kappa\nabla u) - f\Big) dxdydz = 0.$$

Αφού το χωρίο Ω είναι τυχαίο, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(\rho\, c\, u)_t - div(\kappa\nabla u) = f.$$

Αν υποθέσουμε ότι οι ποσότητες ρ, c, κ είναι σταθερες, τότε για την θερμοκρασία u θα έχουμε

$$u_t - k\Delta u = \tilde{f}, \quad k = \frac{\kappa}{\rho c}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{\rho c}. \tag{0.3}$$

Η (0.3) ονομάζεται **εξίσωση θερμότητας**. Σε μία διάσταση η εξίσωση θα γράφεται ως εξής

$$u_t - ku_{xx} = f.$$

Παρατηρούμε ότι αν η διαδικασία είναι στατική δηλαδή με το πέρασμα του χρόνου η θερμοκρασία δεν μεταβάλλεται ($u_t = 0$) τότε η (0.3) γίνεται εξίσωση $Poisson$ και εξίσωση $Laplace$ αν $f \equiv 0$. Τρία τελείως διαφορετικής φύσεως φαινόμενα περιγράφονται απο την ίδια εξίσωση! Επίσης το πραγματικό και φανταστικό μερος μιας αναλυτικής συνάρτησης $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ικανοποιούν την εξίσωση $Laplace$, αυτό άμεσα προκύπτει από τις συνθήκες $Cauchy - Riemann$:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{0.4}$$

Μια συνάρτηση η οποία επαληθευει την εξίσωση $Laplace$ ονομάζεται **αρμονική συνάρτηση**. Τέτοιες συναρτήσεις παίζουν πολύ συμαντικό ρόλο στα Καθαρά και Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Παράδειγμα IV. Έστω τώρα $\rho(t, x, y, z)-$ πυκνότητα στο σημείο $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$ στη χρονική στιγμή t. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_\Omega \rho\, dxdydz,$$

μας δίνει την συνολική μάζα του Ω. Έστω $\mathbf{u} = (u, v, w)$ διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού. Από τον νόμο διατήρησης της μάζας έχουμε ότι η μεταβολή της συνολικής μάζας καθορίζεται από την ροή της μάζας διαμέσου του συνόρου $\partial\Omega$ και από της πηγές της μάζας f που βρίσκονται στο Ω, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho\, dxdydz = -\int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{u}\cdot\nu\, ds + \int_{\Omega} f\, dxdydz.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho\, dxdydz = -\int_{\Omega} div(\rho\,\mathbf{u})\, dxdydz + \int_{\Omega} f\, dxdydz$$

ή

$$\int_{\Omega} \big(\rho_t + div(\rho\,\mathbf{u}) - f\big) dxdydz = 0.$$

Αφού το χωρίο Ω είναι τυχαίο, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\rho_t + div(\rho\,\mathbf{u}) = f.$$

Συνήθως παίρνουνε $f \equiv 0$, δηλαδή

$$\rho_t + div(\rho\,\mathbf{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\, div\mathbf{u} = 0. \tag{0.5}$$

Η καμπύλη $\overline{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ που ορίζεται από το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

ονομάζεται **τροχιά**. Αν η ύλη είναι ασυμπίεστη τότε η πυκνότητα κατά μήκος της τροχιάς πρέπει να είναι σταθερή, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\rho(t, \overline{\sigma}(t)) \equiv \frac{d}{dt}\rho(t, x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Προφανώς

$$\frac{d}{dt}\rho(t, x(t), y(t), z(t)) = \rho_t + \rho_x u + \rho_y v + \rho_z w \equiv \rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho,$$

άρα

$$\rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0 \tag{0.6}$$

Από την (0.5) και την (0.6) προκύπτει

$$div\,\mathbf{u} = 0,$$

αυτή η συνθήκη ονομάζεται **συνθήκη ασυμπιεστότητας**.

Σε μία διάσταση η εξίσωση (0.6) γράφεται ως εξής

$$\rho_t + u\,\rho_x = 0.$$

Παράδειγμα V. Τέλος θα δώσουμε (χωρίς λεπτομέρειες) τις εξισώσεις που περιγράφουν τη **διάδοση των ακουστικών κυμάτων**:

$$\rho_0 u_t + p_x = 0, \;\; p_t + \rho_0 c_0^2 u_x = 0, \tag{0.7}$$

εδώ η $u(t,x)$ είναι η ταχύτητα, η $p(t,x)$ είναι η πίεση και ρ_0, c_0 δοσμένες θετικές σταθερές, ρ_0 είναι η πυκνότητα και η σταθερά c_0 έχει να κάνει με την συμπιεσιμότητα της ύλης.

Παρατηρούμε ότι αν παραγωγίσουμε την πρώτη εξίσωση ως προς t, τη δεύτερη ως προς x και μετά αφαιρέσουμε την δεύτερη από την πρώτη θα έχουμε

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0$$

(αν παραγωγίσουμε την πρώτη ως προς x και θα την πολλαλπλασιάσουμε με c_0^2, τη δεύτερη ως προς t και μετά αφαιρέσουμε την πρώτη από την δεύτερη θα έχουμε $p_{tt} - c_0^2 p_{xx} = 0$.)

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **κυματική**. Στον $\mathbf{R}^n$ η κυματική εξίσωση έχει την μορφή

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \ \text{ ή } \ u_{tt} - a^2 \Delta u = f, \tag{0.8}$$

εδω $a \neq 0$ κάποια σταθερα, η f δοσμένη συνάρτηση που έχει να κάνει με τις πηγές ενέργιας. Γενικά η εξίσωση αυτή περιγράφει μικρές ταλαντώσεις. Η αντίστοιχη εξίσωση με μια χωρική μεταβλητή, δηλαδή η

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

περιγράφει ταλάντωση μιας χορδής.

Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε και πολλά άλλα παραδείγματα, από την δυναμική των πληθυσμών έως την χρηματοοικονομία, και προφανώς από την Φυσική.

Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ή μερικές διαφορικές εξισώσεις) καλούνται εξισώσεις με μια άγνωστη συνάρτηση, τουλάχιστον δύο μεταβλητών, που εκτός ενδεχομένως από την άγνωστη συνάρτηση και τις ανεξάρτητες μεταβλητές περιέχουν και μερικές παραγώγους της συνάρτησης. Τάξη μιας εξίσωσης καλείται η υψηλότερη τάξη μερικής παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Παραδείγματος χάριν οι (0.1), (0.2), (0.3), (0.8) είναι δεύτερης τάξης ενώ οι (0.5), (0.6) είναι πρώτης. Το σύστημα (0.4) και (0.7) είναι σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης.

Γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξεως σε γενική μορφή είναι η εξίσωση

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} + a(\mathbf{x})\, u = f(\mathbf{x}), \tag{0.9}$$

γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως σε γενική μορφή είναι η εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} + a(\mathbf{x})\, u = f(\mathbf{x}).$$

Εδώ $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, οι $a_{i,j}$, a_i, a και f είναι δοσμένες συναρτήσεις ενώ η $u(\mathbf{x})$ είναι η συνάρτηση που πρέπει να προσδιορίσουμε. Στις εξισώσεις που περιγράφουν χρονοεξαρτώμενες διαδικασίες αντί για x_1 (ή x_n) συνήθως γράφουμε t.

Λύση της (0.9) σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ονομάζουμε μια συνάρτηση δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο Ω η οποία επαληθεύει την (0.9) σε κάθε σημείο $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$. Π.χ. η συνάρτησεις

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \;\; u(x,y) = e^{-y}\sin x, \;\; u(x,y) = \cos y \, \sin x$$

είναι στον $\mathbf{R}^2$ λύσεις των εξισώσεων

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \;\; u_{xx} - u_y = 0, \;\; u_{xx} - u_{yy} = 0$$

αντιστοίχως.

Στο μάθημα αυτό θα περιοριστούμε με εξισώσεις που έχουν μόνο δυο ανεξάρτητες μεταβλητές και μπορούν να λυθούν σε κλειστή μορφή.

1. Εξισώσεις πρώτης τάξης

Θεωρούμε την εξίσωση

$$u_t + a(t,x)u_x = f(t,x,u) \ \text{ στον } \ \mathbf{R^2}. \tag{1.1}$$

η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x), \quad |x| < +\infty \tag{1.2}$$

Εδώ a, f και ϕ είναι δοσμένες ομαλές συναρτήσεις. Έστω

$$\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s))$$

μια καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $u(t,x)$ πάνω στην $\overline{\sigma}$ (περιορισμός της u στην $\overline{\sigma}$), δηλαδή

$$u(t(s), x(s)) = u(s).$$

Προφανώς

$$\frac{du(s)}{ds} = \frac{d}{ds}u(t(s),x(s)) = u_t(t(s),x(s))\frac{dt}{ds} + u_x(t(s),x(s))\frac{dx}{ds}.$$

Αν

$$\frac{dt}{ds} = 1 \ \text{ και } \ \frac{dx}{ds} = a(t(s),x(s))$$

τότε η εξίσωση (1.1) κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$ παίρνει την μορφή

$$\frac{d\,u(s)}{ds} = f\big(t(s),x(s),u(s)\big)$$

που είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Για να βρούμε τη λύση αρκεί να ολοκληρώσουμε ως προς s.

Αν $t(0) = 0$ τότε $t = s$ και η καμπύλη γράφεται ως $\overline{\sigma}(t) = (t, x(t))$, η εξίσωση (1.1) κατά μήκος της καμπύλης θα παρει την μορφή

$$\frac{d\,u(t)}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$

αφου πάνω στην καμπύλη $u(t) = u(t, x(t))$.

Παράδειγμα 1.1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$u(t,x) = te^x + tx - 1$$

κατα μήκος της καμπύλης $t^2 + x^2 = 1$, $x > 0$.

Λύση. 1. Η παραμετρική παράσταση της καμπύλης είναι

$$(t(s), x(s)) = (\cos s, \sin s), \quad s \in [0, \pi],$$

η σύναρτηση πάνω στην καμπύλη γράφεται ως

$$u(s) = u(t(s),x(s)) = \cos s e^{\sin s} + \cos s \sin s - 1.$$

Προφανώς

$$\frac{du(s)}{ds} = -\sin s\, e^{\sin s} + \cos^2 s\, e^{\sin s} - \sin^2 s + \cos^2 s =$$

$$(e^{\sin s} + \sin s)(-\sin s) + (\cos s\, e^{\sin s} + \cos s)\cos s =$$

$$u_t(t(s),x(s))\frac{dt}{ds}+u_x(t(s),x(s))\frac{dx}{ds}$$

(αφου $u_t = e^x + x$, $u_x = te^x + t$).

2. Μπορούμε να παραστήσουμε την καμπύλη μας σε μορφή

$$(t,x(t)) = (t,\sqrt{1-t^2}),\quad t\in[-1,1].$$

Ο περιορισμός της u πάνω στην καμπύλη είναι

$$u(t) = te^{\sqrt{1-t^2}} + t\sqrt{1-t^2} - 1.$$

Προφανώς

$$\frac{du(t)}{dt} = e^{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}e^{\sqrt{1-t^2}} + \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$(e^{\sqrt{1-t^2}} + \sqrt{1-t^2}) + (te^{\sqrt{1-t^2}} + t)(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}) =$$

$$u_t(t,x(t)) + u_x(t,x(t))\frac{dx}{dt}.$$

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα $Cauchy$: να βρεθεί η λύση της εξίσωσης (1.1) η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

$$u(0,x) = \phi(x),\quad |x| < +\infty \tag{1.2}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\bar{\sigma}(0) = \big(t(0),x(0)\big) = (0,x_0)$. Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{d\,t(s)}{d\,s} = 1,\quad \frac{d\,x(s)}{d\,s} = a(t(s),x(s))$$

με αρχικές συνθήκες

$$t(0) = 0,\quad x(0) = x_0.$$

Προφανώς $t = s$, άρα έχουμε

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t,x(t)),\quad x(0) = x_0$$

και η εξήσωση (1.1) γράφεται ως εξής

$$\frac{d\,u(t)}{ds} = f\big(t,x(t),u(t)\big)$$

(εδω $u(t) = u(t,x(t))$) με αρχική συνθήκη

$$u(0) = u(0,x(0)) = \phi(x(0)) = \phi(x_0).$$

Η εξίσωση

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t,x(t))$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** και η λύση της ονομάζεται **χαρακτηριστική**. Για να λύσουμε την εξίσωση (1.1) πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = a(t,x(t))$$

(1.3)
$$\frac{d\,u(t)}{d\,t} = f(t, x(t), u(t)).$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (1.3) είναι η χαρακτηριστική εξίσωση, η δεύτερη είναι η (1.1) κατά μήκος της χαρακτηριστικής. Για να λύσουμε την πρόβλημα (1.1), (1.2) προσθέτουμε στο (1.3) τις αρχικές συνθήκες

(1.4)
$$x(0) = x_0, \quad u(0) = \phi(x_0).$$

Συνοψίζοντας καταλήγουμε στο εξής: η επίλυση του προβλήματος (1.1), (1.2) ανάγεται στην επίλυση του προβλήματος (1.3), (1.4). Υπο ποιές προυποθέσεις το πρόβλημα (1.1), (1.2) έχει μοναδική λύση θα το μάθετε στο μάθημα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Παράδειγμα 1.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$u_t + au_x = b, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad u(0, x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = at + x_0 \ \text{ χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = b, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u = bt + \phi(x_0),$$

άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t, x) = bt + \phi(x - at).$$

Έστω $a = b = 1$, $\phi(x) = e^x$, τότε

$$u(t, x) = t + e^{x-t}.$$

Έστω $a = -1$, $b = 2$, $\phi(x) = \sin x$, τότε

$$u(t, x) = 2t + \sin(x + t).$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης $u_t + a\,u_x = b$, παρατηρούμε ότι κατά μήκος της καμπύλης $x - at =$σταθερά η $u(t)$ επαληθεύει την εξίσωση $u'(t) = b$, δηλαδή $u = bt + C$ όπου η C είναι μια ποσότητα η οποία είναι σταθερή όταν η διαφορά $x - at$ είναι σταθερή, συνεπώς η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t, x) = bt + g(x - at)$$

όπου g μια τυχαία ομαλή συνάρτηση. (Προφανώς για τυχαία συνάρτηση g η $g(x - at)$ είναι σταθερά αν και μόνο αν η $x - at$ είναι σταθερά).

Παράδειγμα 1.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος *Cauchy*

$$u_t + x\,u_x = 0, \quad u(0, x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x\Big|_{t=0} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^t \ \text{ χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u = \phi(x_0),$$

άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t,x) = \phi(xe^{-t}).$$

Αν $\phi(x) = x$, τότε η λύση είναι

$$u(t,x) = x\,e^{-t}.$$

Αν $\phi(x) = x^2 + 1$,τότε

$$u(t,x) = x^2 e^{-2t} + 1.$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη γενική λύση της εξίσωσης $u_t + x\,u_x = 0$, παρατηρούμε ότι κατά μήκος της καμπύλης $x\,e^{-t}$ =σταθερά η u είναι σταθερή, συνεπώς η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g(x\,e^{-t})$$

όπου g μια τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + t\,u_x = (t+x)u, \;\; u(0,x) = \phi(x).$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = t, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0 \;\;\Rightarrow\;\; x = \frac{1}{2}t^2 + x_0 \;\; \text{χαρακτηριστική}$$

$$\frac{du}{dt} = (t+x)u, \;\; u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \;\;\Rightarrow\;\; \frac{du}{u} = \big(t + \frac{1}{2}t^2 + x_0\big)dt,$$

άρα

$$u(t,x) = \phi(x_0)e^{x_0 t + t^3/6 + t^2/2}$$

ή

$$u(t,x) = \phi(x - t^2/2)e^{t^2/2 + tx - t^3/3}$$

Έστω $\phi(x) = e^x$, τότε

$$u(t,x) = e^{x+tx-t^3/3}.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης $u_t + t\,u_x = (t+x)u$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = g(x - t^2/2)e^{t^2/2 + tx - t^3/3},$$

g τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_t + (t-x)\,u_x = (x+1-t)e^t \;\; \text{στον} \;\; \mathbf{R}^2,$$

$$u(0,x) = \phi(x) \;\; \text{για} \;\; |x| < +\infty.$$

Ξεχωριστά γράψτε τη λύση για

$$\phi(x) = 2x+1 \;\; \text{και} \;\; \phi(x) \equiv 1.$$

Λύση.

$$\frac{dx}{dt} = -x + t, \;\; x\Big|_{t=0} = x_0 \;\;\Rightarrow\;\; x(t) = (x_0+1)e^{-t} + t - 1 \;\; \text{χαρακτηριστική}$$

(εδω λύσαμε εξίσωση πρώτης τάξης $x'(t)+x(t) = t$), συνεπώς η αρχική εξίσωση κατα μήκος της χαρακτηριστικής με την αρχική συνθύκη παίρνει τη μορφή

$$\frac{du}{dt} = x_0 + 1, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x_0) \quad \Rightarrow \quad u(t) = t(x_0 + 1) + \phi(x_0),$$

άρα

$$u(t, x) = te^t(x - t + 1) + \phi\big(e^t(x - t + 1) - 1\big)$$

αφού $x_0 = e^t(x - t + 1) - 1$.

Αν $\phi(x) = 2x + 1$

$$u(t, x) = te^t(x - t + 1) + 2e^t(x - t + 1) - 1.$$

Για $\phi(x) \equiv 1$

$$u(t, x) = te^t(x - t + 1) + 1.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης $u_t + (t - x)\, u_x = (x + 1 - t)e^t$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t, x) = g\big(e^t(x - t + 1) - 1\big) + te^t(x - t + 1),$$

g οπως και πριν, τυχαία ομαλή συνάρτηση.

Παρομοίως αντιμετωπίζεται και η εξίσωση

$$a_1(t, x)u_t + a_2(t, x)u_x = f(t, x, u) \tag{1.5}$$

όπου

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0. \tag{1.7}$$

Έστω $\overline{\sigma}(s) = (t(s), x(s))$ μια καμπύλη στον $\mathbf{R^2}$ που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dt}{ds} = a_1, \quad \text{και} \quad \frac{dx}{ds} = a_2$$

τότε η εξίσωση (1.5) κατά μήκος της καμπύλης $\overline{\sigma}$ παίρνει την μορφή

$$\frac{d\,u(s)}{ds} = f\big(t(s), x(s), u(s)\big)$$

που είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Η συνθήκη (1.7) είναι ουσιαστική, αν παραβιάζεται τότε το πρόβλημα $Cauchy$ μπορεί να μην έχει λύση. Στην περίπτωση που σε κάποιο σημείο ισχύει $a_1^2 + a_2^2 = 0$ λέμε ότι σε αυτό το σημείο η εξίσωση εκφυλίζεται. Περισσότερα για τις εξισώσεις πρώτης τάξεις θα μάθετε στο μάθημα Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικες Παραγώγους.

Ασκήσεις.

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$ με $\phi(x)$ τυχαία ομαλή συνάρτηση.

1.
$$u_t + x\,u_x = x\,u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \quad |x| < +\infty.$$

2.
$$u_t + \frac{t}{x}\,u_x = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(|x|), \quad |x| < +\infty.$$

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$ και να προσδιορισθεί το χωρίο στον $\mathbf{R}^2$ όπου η αρχική συνθήκη ορίζει τη λύση.

3.
$$u_t + u_x = 4, \quad u\Big|_{t=0} = \sin x \ \text{ για } \ |x| < 1.$$

4.
$$u_t + x\,u_x = (x+t)u, \quad u\Big|_{t=0} = \phi(x), \quad x \in [0,1] \cup [2,3].$$

($\phi(x)$ τυχαία ομαλή συνάρτηση).

5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$
$$u_t + u_x = x(u+1), \quad u(0,x) = cos\,x.$$

6. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$
$$u_t - (t+x)\,u_x = (x-1+t)e^t, \quad u(0,x) = \phi(x).$$

Ξεχωριστά γράψτε τη λύση για
$$\phi(x) = 2x - 1 \ \text{ και } \ \phi(x) \equiv -1.$$

§2. **Ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης**

Η (0.9) για $n = 2$ παίρνει τη μορφή

$$a_{11}u_{xx} + \tilde{a}_{12}u_{xy} + \tilde{a}_{21}u_{yx} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a\,u = f$$

θεωρούμε ότι $u = u(x, y) \in C^2$(δηλαδή δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη) και γράφουμε την εξίσωση σε μορφή

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a\,u = f \tag{2.1}$$

όπου

$$a_{12} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21}).$$

Οι συναρτήσεις $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$ ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης και η συνάρτηση $f(x, y)$ το **δεύτερο μέρος** της.

Λέμε ότι η (2.1) είναι στο σημείο $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$

1.) **υπερβολική** (υπερβολικού τύπου) αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

2.) **ελλειπτική** (ελλειπτικού τύπου) αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

3.) **παραβολική** (παραβολικού τύπου) αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Εάν η εξίσωση είναι υπερβολική $\forall(x, y) \in \Omega$ λέμε ότι είναι υπερβολική στο Ω, ανάλογα ορίζεται η ελλειπτικότητα και η παραβολικότητα στο Ω.

Προφανώς η κυματική εξίσωση

$$u_{yy} - u_{xx} = 0$$

είναι υπερβολικού τύπου, (συνήθως αντί για y γράφουμε t επειδή η μεταβλητή αυτή παίζει τον ρόλο του χρόνου), η εξίσωση $Laplace$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

είναι ελλειπτικού τύπου, και η εξίσωση θερμότητας

$$u_y - u_{xx} = 0$$

παραβολικού τύπου (και εδώ συνήθως αντί για y γράφουμε t για τον ίδιο λόγο).

Όπως είναι γνωστό, η καμπύλη

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

είναι έλλειψη, αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, υπερβολή, αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ και παραβολή, αν $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Σε αυτό οφείλουν την ονομασία τους οι τρεις τύποι των εξισώσεων.

Ασκήσεις.

1. Στον $\mathbf{R^2}$ θεωρούμε την εξίσωση

$$u_{xx} + 2u_{xy} + yu_{yy} + u_x - u_y - u = 1.$$

Προσδιορίστε τα χωρία όπου η εξίσωση είναι υπερβολικού τύπου, παραβολικού τύπου, ελλειπτικού τύπου.

2. Προσδιορίστε τον τύπο των ακόλουθων εξισώσεων:

$$u_{xy} = f, \;\; u_y + u_{xx} = f, \;\; xu_{xx} + u_{yy} = f$$

όπου f τυχαία γραμμική συνάρτηση των x, y, u, u_x, u_y.

§3. **Κυματική Εξίσωση, τύπος** $d'Alembert$

Στον $\mathbf{R^2}$ θεωρούμε την εξίσωση

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x), \tag{3.1}$$

όπου η f είναι δοσμένη ομαλή συνάρτηση, t - χρόνος, x - χωρική μεταβλητή, u_{tt} μερική παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς t και u_{xx} μερική παράγωγος δεύτερης τάξης ως προς x. Ψάχνουμε τη *γενική λύση* $u(t,x)$ της εξίσωσης (3.1).

Έστω $f \equiv 0$, έχουμε

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{3.2}$$

Η (3.2) ονομάζεται ομογενής εξίσωση. Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$(t,x) \to (\xi,\eta)$$

$$u(t,x) \to u(\xi,\eta) = u(\xi(t,x),\eta(t,x))$$

όπου

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t.$$

Προφανώς

$$u_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(\xi(t,x),\eta(t,x)) = u_\xi(\xi,\eta)\xi_t + u_\eta(\xi,\eta)\eta_t = -u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta),$$

$$u_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} u(\xi(t,x),\eta(t,x)) = u_\xi(\xi,\eta)\xi_x + u_\eta(\xi,\eta)\eta_x = u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta).$$

Παρομοίως για τις παραγώγους δεύτερης τάξης

$$u_{tt}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(- u_\xi(\xi,\eta) + u_\eta(\xi,\eta)\Big) =$$

$$-u_{\xi\xi}(\xi,\eta)\xi_t - u_{\xi\eta}(\xi,\eta)\eta_t + u_{\eta\xi}(\xi,\eta)\xi_t + u_{\eta\eta}(\xi,\eta)\eta_t =$$

$$u_{\xi\xi}(\xi,\eta) - 2u_{\xi\eta}(\xi,\eta) + u_{\eta\eta}(\xi,\eta),$$

$$u_{xx}(t,x) = ... = u_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 2u_{\xi\eta}(\xi,\eta) + u_{\eta\eta}(\xi,\eta).$$

Άρα

$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = -4u_{\xi\eta}(\xi,\eta)$$

συνεπώς η (3.2) παίρνει τη μορφή

$$u_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0. \tag{3.3}$$

Ολοκληρώνοντας δυο φορές παίρνουμε τη γενική λύση της εξίσωσης (3.3):

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + \Phi(\eta),$$

όπου F και Φ αυθαίρετες δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Συνεπώς η γενική λύση της εξίσωσης (3.1) είναι

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t).$$

Έστω τώρα οι v και w λύσεις της (3.1), δηλαδή

$$v_{tt} - v_{xx} = f \;\text{ και }\; w_{tt} - w_{xx} = f,$$

τότε η $\tilde{u} \equiv v - w$ είναι λύση της εξίσωσης (2.2), πράγματι

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = v_{tt} - v_{xx} - (w_{tt} - w_{xx}) = f - f = 0.$$

Άρα αν βρήκαμε κάποια (μερική) λύση της (3.1) π.χ. την w τότε οποιαδήποτε άλλη λύση v της (3.1) δίνεται από τον τύπο

$$v = w + \tilde{u}.$$

Τουτ' έστιν ισχύει το εξής

γενική λύση της (3.1)=
μερική λύση της (3.1) + γενική λύση της (3.2).

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η

$$u_0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta \Big) d\tau$$

είναι μερική λύση της (3.1). Πράγματι θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t G(t,x,\tau)d\tau, \quad \text{όπου} \;\; G(t,x,\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta.$$

Προφανώς

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^t G(t,x,\tau)d\tau \Big) =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\int_0^{t+\Delta t} G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau - \int_0^t G(t,x,\tau)d\tau \Big] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\int_t^{t+\Delta t} G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau + \int_0^t \big(G(t+\Delta t,x,\tau) - G(t,x,\tau) \big) d\tau \Big] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Big[G(t+\Delta t,x,\tau^*) + \frac{1}{\Delta t}\int_0^t \big(G(t+\Delta t,x,\tau) - G(t,x,\tau) \big) d\tau \Big] =$$

$$G(t,x,t) + \int_0^t G_t(t,x,\tau)d\tau = \int_0^t G_t(t,x,\tau)d\tau,$$

όπου $\tau^* \in [t, t+\Delta t]$. Εδώ αφαιρέσαμε και προσθέσαμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t G(t+\Delta t,x,\tau)d\tau$$

και μετά χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τα ολοκληρώματα. Θα υπολογίσουμε τώρα την παράγωγο G_t, έχουμε

$$G_t(t,x,\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\Big(\int_0^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta + \int_{x-t+\tau}^{0} f(\tau,\zeta)d\zeta \Big) =$$

$$\frac{1}{2}\big[f(\tau, x+t-\tau) + f(\tau, x-t+\tau \big].$$

Συνεπώς έχουμε

$$u_{0t}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau,x+t-\tau) + f(\tau,x-t+\tau) \big] d\tau,$$

$$u_{0tt}(t,x) = f(t,x) + \frac{1}{2}\int_0^t \big[f_{x+t-\tau}(\tau, x+t-\tau) - f_{x-t+\tau}(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Παρομοίως

$$u_{0x}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau, x+t-\tau) - f(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

$$u_{0xx}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f_{x+t-\tau}(\tau, x+t-\tau) - f_{x-t+\tau}(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Δηλαδή

$$u_{0tt} - u_{0xx} = f(t,x).$$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι η γενική λύση της (3.1) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau.$$

Πρόβλημα *Cauchy***.** Να βρεθεί στον $\mathbf{R^2}$ η λύση της εξίσωσης (3.1) η οποία ικανοποιεί τις *αρχικές συνθήκες*

(3.4) $$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \ \text{ για } \ |x| < +\infty,$$

όπου ϕ και ψ δοσμένες ομαλές συναρτήσεις.

Πρώτα θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα *Cauchy* (3.2), (3.4). Η γενική λύση της εξίσωσης (3.2) είναι

$$u(t,x) = F(x-t) + \Phi(x+t)$$

με αυθαίρετες (ομαλές) F και Φ. Πρέπει να προσδιορίσουμε τις F και Φ χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (3.4). Έχουμε

$$u(0,x) = F(x) + \Phi(x) = \phi(x),$$
$$u_t(0,x) = -F'(x) + \Phi'(x) = \psi(x).$$

Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη ισότητα παίρνουμε

$$-F(x) + \Phi(x) + C = \int_{x_0}^{x} \psi(\zeta)d\zeta,$$

με C αυθαίρετη σταθερά. Τώρα χρησιμοποιώντας την πρώτη ισότητα καταλήγουμε στο

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \psi(\zeta)d\zeta - \frac{1}{2}C$$

και

$$F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}C$$

Συνεπώς

$$\Phi(x+t) = \frac{1}{2}\phi(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta - \frac{1}{2}C$$

$$F(x-t) = \frac{1}{2}\phi(x-t) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x-t} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}C$$

και η λύση του προβλήματος (3.2), (3.4) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta$$

ο τύπος αυτός ονομάζεται **τύπος** $d'Alembert$.

Παράδειγμα 3.1 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = \sin x, \;\; u_t(0,x) = x \text{ για } |x| < \infty.$$

Λύση: Έχουμε $\phi(x) = \sin x$, $\psi(x) = x$ άρα

$$u(t,x) = \frac{\sin(x+t)+\sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \zeta d\zeta = \sin x \, cos\, t + xt.$$

Περνάμε τώρα στην γενική περίπτωση, θεωρούμε το πρόβλημα $Cauchy$ (3.1), (3.4). Κατ αρχάς παρατηρούμε ότι για την

$$u_0(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau$$

έχουμε

$$u_0(0,x) = 0.$$

Επίσης

$$u_{0t}(0,x) = 0,$$

διότι

$$u_{0t}(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(\tau, x+t-\tau) + f(\tau, x-t+\tau)\big]d\tau.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος $Cauchy$ (3.1), (3.4) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\tau,\zeta)d\zeta\Big)d\tau \tag{3.5}$$

Παράδειγμα 3.2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \text{ στον } \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = \sin 2x, \;\; u_t(0,x) = 0 \text{ για } |x| < \infty.$$

Λύση. Έχουμε $\phi(x) = \sin 2x$, $\psi(x) = 0$, $f(t,x) = 1$ άρα

$$u(t,x) = \frac{\sin(2(x+t))+\sin(2(x-t))}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t 2(t-\tau)d\tau =$$

$$\sin 2x \, cos\, 2t + \frac{t^2}{2}.$$

Παρατήρηση. Για να είναι η λύση του προβλήματος (3.1), (3.4) δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ($u(t,x) \in C^2$) πρέπει $\phi(x) \in C^2$, $\psi(x) \in C^1$, $f(t,x) \in C^1$.

Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος $Cauchy$ προκύπτει άμεσα άπο τον τρόπο κατασκευής της λύσης μέσω της γενικής λύσης της εξίσωσης. Πράγματι έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x), \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \;\; |x| < \infty,$$

$$v_{tt} - v_{xx} = f(t,x), \;\; v(0,x) = \phi(x), \;\; v_t(0,x) = \psi(x), \;\; |x| < \infty.$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w \equiv u - v$. Προφανώς

$$w_{tt} - w_{xx} = 0$$

και

$$w(0,x) = w_t(0,x) = 0 \;\; |x| < \infty.$$

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι $F(x-t) + \Phi(x+t)$ και επαληθεύοντας τις μηδενικές αρχικές συνθήκες καταλήγουμε στο ότι $F \equiv \Phi \equiv 0$ άρα

$$w \equiv 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; u \equiv v.$$

Ας επιστρέψουμε τωρα στο προβλημα (3.2), (3.4). Είναι προφανές οτι αν οι αρχικές συνθήκες είναι μήδεν, τότε και η λύση είναι μηδεν για κάθε t. Έστω τώρα $a > 0$ και

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0, & \text{στο } (a,b) \\ 0, & \text{στο } \mathbf{R} \setminus (a,b), \end{cases}$$

και

$$\psi(x) = \begin{cases} > 0, & \text{στο } (a,b) \\ 0, & \text{στο } \mathbf{R} \setminus (a,b), \end{cases} .$$

Ας πάρουμε ένα σημείο $(t_0 \neq 0, x_0)$, για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς ας πάρουμε $x_0 = 0$, έχουμε

$$u(t_0,0) = \frac{\phi(t_0) + \phi(-t_0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-t_0}^{t_0} \psi(\zeta)d\zeta.$$

Αν ο χρόνος $|t_0| < a$, τότε $u(t_0,0) = 0$ δηλαδή $u(t,0) = 0 \; \forall t \in (-a,a)$. Μόνο όταν ο χρόνος θα φτάσει στο a $(-a)$ η λύση θα ¨νιώσει¨ την διαταραχη που είχε γίνει στην αρχική στιγμή $t = 0$. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών.*

Παράδειγμα 3.3. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2$$
$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \;\; \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \text{ για } x \in [-1,1] \text{ και } \phi(x) > 0 \text{ για } x \in \mathbf{R} \setminus [-1,1],$$
$$\psi(x) \equiv 0 \text{ για } x \in [0,1] \text{ και } \psi(x) > 0 \text{ για } x \in \mathbf{R} \setminus [0,1].$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) \equiv 0$.

Λύση. Έχουμε

$$u(t,x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\zeta)d\zeta$$

Για να ισχύει $u(t,x)=0$ πρέπει $\phi(x+t)=0$, $\phi(x-t)=0$ και $\psi(\zeta)=0$. Άρα

$$x+t\in[-1,1],\quad x-t\in[-1,1]$$

και

$$x+t\in[0,1],\quad x-t\in[0,1].$$

Συνεπώς

$$0\le x+t\le 1,\quad 0\le x-t\le 1$$

δηλαδή ρόμβος με κορυφές στα σημεία (0,0), (1,0), (1/2,1/2), (1/2, -1/2).

Παράδειγμα 3.4. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt}-u_{xx}=0 \text{ στον } \mathbf{R}^2$$
$$u(0,x)=\phi(x),\quad u_t(0,x)=\psi(x) \text{ για } |x|<\infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x)\in C^2,\ \ \psi(x)\in C^1$ και

$$\phi(x)>0 \ \text{ για } \ x\in(-1,0) \ \text{ και } \ \phi(x)\equiv 0 \ \text{ για } \ x\in\mathbf{R}\setminus(-1,0),$$

$$\psi(x)>0 \ \text{ για } \ x\in(1,2) \ \text{ και } \ \psi(x)\equiv 0 \ \text{ για } \ x\in\mathbf{R}\setminus(1,2).$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x)>0$.

Λύση. Έχουμε

$$u(t,x)=\frac{\phi(x+t)+\phi(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\zeta)d\zeta$$

Αφού οι ϕ και ψ είναι μη αρνητικές για να ισχύει $u(t,x)>0$ σε ένα σημείο (t,x) αρκεί στο σημείο αυτο να ισχύει ενα απο τα παρακάτω

$$\phi(x+t)>0 \ \text{ ή } \ \ \phi(x-t)>0$$

ή στο διάστημα $(x-t,x+t)$ η ψ να έιναι κάπου θετική, δηλαδή

$$x+t\in(-1,0) \ \text{ ή } \ x-t\in(-1,0)$$

ή

$$(x-t,x+t)\cap(1,2)\neq\emptyset.$$

Υπο την προϋπόθεση $x-t\le x+t \ \Leftrightarrow\ t\ge 0$ αλλιώς το ολοκλήρωμα $\int_{x-t}^{x+t}\psi(\zeta)d\zeta$ μπορεί να είναι αρνητικό. Συνεπώς το ζητούμενο χωρίο είναι το εξής

$$\{(t,x): t\ge 0,\ -1<x+t<0\}\cup\{(t,x): t\ge 0,\ -1<x-t<0\}\cup$$
$$\{(t,x): t\ge 0,\ 1<x-t<2\}\cup\{(t,x): t\ge 0,\ 1<x+t<2\}\cup$$
$$\{(t,x): t\ge 0,\ x-t<1,\ x+t>2\}.$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad a \neq 0 \ \text{ σταθερά}$$

ανάγεται με αντικατάσταση $y = x/a$ στην εξίσωση

$$u_{tt} - u_{yy} = f(t,y)$$

(συνεπώς χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε $a = 1$.)

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$

$$u_{tt} - u_{xx} = t + x \ \text{ στον } \ \mathbf{R^2}$$

$$u(0,x) = x^3, \ \ u_t(0,x) = \sin\, 2x \ \text{ για } \ |x| < \infty.$$

3. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2$$

$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \ \ \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R} \setminus (0,1) \ \text{ και } \ \phi(x) > 0 \ \text{ για } \ x \in (0,1),$$

$$\psi(x) \equiv 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R}.$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) > 0$.

4. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2$$

$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \ \ \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R},$$

$$\psi(x) \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R} \setminus (-1,0) \ \text{ και } \ \psi(x) > 0 \ \text{ για } \ x \in (-1,0).$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) \equiv 0$.

5. Έστω ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ είναι λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στον } \mathbf{R}^2$$

$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } |x| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι $\phi(x) \in C^2, \ \ \psi(x) \in C^1$ και

$$\phi(x) \equiv 0 \ \text{ για } \ x \in \mathbf{R} \setminus (0,1) \ \text{ και } \ \phi(x) < 0 \ \text{ για } \ x \in (0,1),$$

$$\psi(x) \equiv 0 \ \text{ στον } \ \mathbf{R} \setminus (2,3) \ \text{ και } \ \psi(x) < 0 \ \text{ για } \ x \in (2,3),$$

Προσδιορίστε το χωρίο όπου ισχύει $u(t,x) < 0$.

§4. **Σειρές** $Fourier$

Ένα σύστημα συναρτήσεων $\{\psi_m\}$ ή $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$

$$\psi_0,\ \ \psi_1,\ \ \psi_2,\ \ ...,\ \ \psi_m,\ \ ...$$

ονομάζεται **ορθοκανονικό στο διάστημα** (a, b) αν

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο (a, b), δηλαδή

$$\int_a^b f^2(x)dx < +\infty.$$

Οι αριθμοί

$$c_k = \int_a^b f(x)\psi_k(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

ονομάζονται συντελεστές $Fourier$ της $f(x)$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$.

Ορισμός. *Η σειρά*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\psi_k(x)$$

ονομάζεται σειρά $Fourier$ *της συνάρτησης* $f(x)$ *ως προς το σύστημα* $\{\psi_k\}$.

Έστω τώρα έχουμε ένα **ορθογώνιο σύστημα** $\{\phi_k\}$ στο (a, b), δηλαδή

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} \neq 0, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Το σύστημα $\{\psi_k\}$ με

$$\psi_k = \frac{\phi_k}{\|\phi_k\|} \ \text{ όπου } \ \|\phi_k\| = \Big(\int_a^b \phi_k^2(x)dx\Big)^{1/2}$$

θα είναι ορθοκανονικό. Πράγματι

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \frac{1}{\|\phi_m\|\|\phi_n\|}\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Προφανώς

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\psi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\|\phi_k\|}\phi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k\phi_k$$

με c_k- συντελεστες $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$ και $\tilde{c}_k = c_k\|\phi_k\|^{-1}$- συντελεστές $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\phi_k\}$. Για τα $\tilde{c}_k$ έχουμε

$$\tilde{c}_k = \frac{c_k}{\|\phi_k\|} = \frac{\int_a^b f\psi_k\,dx}{\|\phi_k\|} = \frac{\int_a^b f\phi_k\,dx}{\|\phi_k\|^2}. \tag{4.1}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το σύστημα

$$\{\phi_k\}: \qquad 1,\ \ cos\frac{k\pi}{l}x,\ \ \sin\frac{k\pi}{l}x,\ \ k = 1, 2, ... \tag{4.2}$$

$(\|\phi_0\| = \sqrt{2l},\ \ \|\phi_k\| = \sqrt{l},\ \ k = 1, 2, ...)$ είναι ορθογώνιο στο $(-l, l)$, ενώ το σύστημα

$$(4.3) \qquad \{\psi_k\} : \qquad \frac{1}{\sqrt{2l}},\ \ \frac{1}{\sqrt{l}} cos\frac{k\pi}{l}x,\ \ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x,\ \ k = 1, 2, ...$$

είναι ορθοκανονικό στο $(-l, l)$.

Θεωρούμε τους συντελεστές $Fourier$ της συνάρτησης $f(x)$ ως προς το σύστημα $\{\phi_k\}$ (βλ. (4.1)):

(4.4)

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx,\ \ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, \sin\frac{k\pi}{l}xdx,\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

Η σειρά $Fourier$:

$$(4.5) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x\big)$$

ονομάζεται **τριγωνομετρική σειρά** της $f(x)$.

Παρατήρηση. Στο (4.4) συμφωνα με το (4.1) θα έπρεπε να είχαμε γράψει $k = 1, 2, ...$ και $a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$ (αφου $\|\phi_0\|^2 = 2l$) και στη σειρά (4.5) αντι $a_0/2$ θα είχαμε a_0. Το κάνουμε λίγο διαφορετικά για να ορίζουμε τους συντελεστές a_k με ενιαίο τρόπο (4.4) για όλα τα k.

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη στο $[-l, l]$. Προφανώς η $f(x)$ μπορεί να επεκταθεί περιοδικά στον $\mathbf{R}$ με περίοδο $2l$. Το ερώτημα είναι πότε ισχύει η ισότητα

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x\big).$$

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη). *Αν η $f(x)$ είναι συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2l$ και η $f'(x)$ είναι τμηματικά συνεχής, τότε η τριγωνομετρική σειρά της $f(x)$ συγκλίνει στον $\mathbf{R}$ ομοιόμορφα*, απόλυτα και ισχύει*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\, cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\, \sin\frac{k\pi}{l}x\big).$$

Παρατήρηση. Προφανώς η τριγωνομετρική σειρά θα προκύψει και αν θα θεωρήσουμε την σειρά $Fourier$ ως προς το σύστημα $\{\psi_k\}$:

$$\frac{\bar{a}_0}{2\sqrt{l}} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(\bar{a}_k\frac{1}{\sqrt{l}}cos\frac{k\pi}{l}x + \bar{b}_k\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x\big)$$

όπου

$$\bar{a}_k = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_{-l}^{l} f(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx,\ \ \bar{b}_k = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_{-l}^{l} f(x)\, \sin\frac{k\pi}{l}xdx,\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν η $f(x)$ είναι περιττή ως προς το σημείο $x = 0$, τότε $a_k = 0$ για κάθε k.

Πράγματι, το ολοκλήρωμα από $-l$ εως l μιας περιττής ως προς το $x = 0$ συνάρτησης είναι μηδέν. Το $\cos \frac{k\pi}{l} x$ είναι άρτια ως προς το $x = 0$ συνάρτηση. Το ζητούμενο προκύπτει απο το γεγονός ότι γινόμενο άρτιας (cos) και περιττής (f) συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.

***Ορισμός 1.** *Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων* $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *ορισμένων σε ενα διάστημα* $I \subset \mathbf{R}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* I *στην συνάρτηση* $S(x)$ *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* $n(\varepsilon)$ *(που δεν εξαρτάται απο την επιλογή του* $x \in I$*) τ.ω.*

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall n > n(\varepsilon) \ \ \text{και} \ \ \forall x \in I.$$

Κριτήριο $Cauchy$**.** *Η ακολουθία συναρτήσεων* $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *ορισμένων σε ενα διάστημα* $I \subset \mathbf{R}$ *είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο* I *αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* $n(\varepsilon)$ *(που δεν εξαρτάται απο την επιλογή του* $x \in I$*) τ.ω.*

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall n, m > n(\varepsilon) \ \ \text{και} \ \ \forall x \in I.$$

Ορισμός 2. *Λέμε ότι η συναρτησιακή σειρά*

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i(x), \quad x \in I$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο I *αν συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αυτης της σειράς. Δηλαδή αν συγκλίνει ομοιόμορφα η ακολουθία*

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i(x).$$

Κριτήριο $Weierstrass$**.** *Έστω οτι η αριθμητική σειρά*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i, \quad \gamma_i \geq 0$$

συγκλίνει, και έστω οτι

$$|h_i(x)| \leq \gamma_i, \ \ \forall x \in I, i = 0, 1, 2, \dots .$$

Τότε η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} h_i(x)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα στο I*.*

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι αν η $f(x)$ είναι άρτια ως προς το σημείο $x = 0$, τότε στη σειρά (4.5) $b_k = 0$ για κάθε k.

2. Αποδείξτε ότι το σύστημα (4.2) είναι ορθογώνιο στο $(-l, l)$ και το σύστημα (4.3) είναι ορθοκανονικό στο $(-l, l)$.

§5. Μέθοδος Fourier.

Πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$ για την κυματική εξίσωση: Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T = \{(t,x) : |t| < \infty,\ \ 0 < x < l\}$$

η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$u(0,x) = \phi(x),\ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = \mu_1(t),\ \ u(t,l) = \mu_2(t) \text{ για } |t| < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f(t,x) \in C^1((-T,T)\times[0,l])\ \ \forall T > 0,\ \ \phi(x) \in C^2([0,l]),\ \ \psi(x) \in C^1([0,l])$$

και

$$\phi(0) = \mu_1(0),\ \ \psi(0) = \mu_1'(0),\ \ \phi(l) = \mu_2(0),\ \ \psi(l) = \mu_2'(0).$$

Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε

$$\mu_1(t) \equiv \mu_2(t) \equiv 0.$$

Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση

$$v(t,x) = u(t,x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(t) - \frac{x}{l}\mu_2(t).$$

Προφανώς

$$v_{tt} - v_{xx} = f_1(t,x) \equiv f(t,x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1''(t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t)$$

και

$$v(t,0) = v(t,l) = 0\ \ \forall t,$$

επίσης

$$v(0,x) = \phi_1(x) \equiv \phi(x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(0) - \frac{x}{l}\mu_2(0),$$
$$v_t(0,x) = \psi_1(x) \equiv \psi(x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1'(0) - \frac{x}{l}\mu_2'(0),$$
$$\phi_1(0) = \phi_1(l) = 0, \quad \psi_1(0) = \psi_1(l) = 0.$$

Αρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το πρόβλημα

(5.1) $$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T$$

(5.2) $$u(0,x) = \phi(x),\ \ u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l$$

(5.3) $$u(t,0) = u(t,l) = 0 \text{ για } |t| < \infty$$

με

$$\phi(0) = \phi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(t,x) \equiv 0$:

(5.4) $$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T$$

Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (5.4) και παίρνουμε

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{για κάθε} \;\; t \;\; \text{και} \;\; x$$

συνεπώς

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

όπου λ σταθερά. Άρα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; X(0) = X(l) = 0 \tag{5.5}$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{5.6}$$

Αν $\lambda \le 0$, τότε $X(x) \equiv 0$. Πράγματι, για $\lambda < 0$ η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

και για $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Και στις δυο περιπτώσεις οι συνθήκες $X(0) = X(l) = 0$ μας δίνουν $C_1 = C_2 = 0$. Τωρα για $\lambda > 0$ η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2\, cos\sqrt{\lambda}x,$$

από τις συνθήκες $X(0) = X(l) = 0$ προκύπτει ότι

$$C_2 = 0, \;\; C_1 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

άρα $\sqrt{\lambda}l = \pi k$ (αφού θέλουμε $X(x) \not\equiv 0$). Συνεπώς για

$$\lambda_k = \Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2, \;\; k = 1, 2, ...$$

υπάρχει μη τετριμμένη λύση του προβλήματος (5.5):

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Προφανώς για $\lambda = \lambda_k$ η (5.6) μας δίνει

$$T_k(t) = A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t,$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_k(t)\, X_k(x) = \big(A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t\big) \sin\frac{k\pi}{l}x, \;\; k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (5.4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (5.3). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x),$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (5.2).

Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ περιττά στο $(-l, 0)$ και μετά περιοδικά με περίοδο $2l$ στον $\mathbf{R}$. Τις γράφουμε σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{5.7}$$

(αφου ϕ και ψ περιττές ως προς $x = 0$) όπου

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \phi(x) \sin\frac{k\pi}{l}x dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} \phi(x) \sin\frac{k\pi}{l}x dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \psi(x) \sin\frac{k\pi}{l}x dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} \psi(x) \sin\frac{k\pi}{l}x dx.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{5.8}$$

Έχουμε ότι αν η σειρά αυτή συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν την παραγωγίσουμε δυο φορές όρο προς όρο ως προς t ή ως προς x, τότε η $u(t, x)$ επαλήθευει την εξίσωση (5.4) και τις συνοριακές συνθήκες (5.3). Για να επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες (5.2) επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο. Για την επιλογή των A_k έχουμε

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0, x) = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_k = a_k.$$

Για την επιλογή των B_k έχουμε

$$u_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0, x) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$B_k = \frac{l}{k\pi} b_k.$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα (υπό την προϋπόθεση σύγκλισης των σειρών) ότι η λύση του προβλήματος (5.4), (5.2), (5.3) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t]\sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{5.9}$$

Η απόδειξη της σύγκλισης της σειράς (5.9) και των σειρών:

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[-\frac{k\pi}{l}a_k \sin\frac{k\pi}{l}t + b_k \, cos\frac{k\pi}{l}t\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_x = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k \, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t\Big]\frac{k\pi}{l}cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty}-\frac{k^2\pi^2}{l^2}[a_k \, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t]\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}-\frac{k^2\pi^2}{l^2}[a_k \, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t]\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

θα δοθεί στο μάθημα Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους.

Παράδειγμα 5.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \;\; \text{στο} \;\; Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u(0,x) = \sin x + \sin 4x, \;\; u_t(0,x) = \sin x + \sin 2x,$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) = \sin x + \sin 4x,$$

$$\psi(x) = \sin x + \sin 2x.$$

Συνεπώς $a_1 = 1$, $a_4 = 1$, $a_i = 0$ για $i \neq 1, 4$ $b_1 = b_2 = 1$, $b_j = 0$ για $j > 2$. Αρα η λύση είναι

$$u(t,x) = (cos\, t + \sin t)\sin x + \frac{1}{2}\sin 2t \sin 2x + cos\, 4t \sin 4x.$$

Συνοψίζοντας παρατηρούμε οτι αυτό που κάναμε μπορούμε να το δούμε και ως εξής: ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (τριγωνομετρική σειρά)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{5.10}$$

(βλ. (5.8)) και προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις $u_k(t)$ αντικαθιστώντας την (5.10) στην (5.4) και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (5.2)

Θα εφαρμόσουμε αυτη τη προσέγγιση σε πιο γενική περίπτωση. Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα (5.1)-(5.3). Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (5.10). Πρώτα γράφουμε την $f(t,x)$ σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{5.11}$$

όπου

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x)\, \sin \frac{k\pi}{l} x\, dx.$$

Παρατήρηση. Η ισότητα (5.11) εν γένει ισχύει μόνο για $x \in (0,l)$ και οχι για $x = 0$, $x = 1$ οπου η σειρά $Fourier$ μπορεί να μην παριστάνει την f (βλ. σελ. 74). Αυτο δεν μας δημιουργεί κανένα πρόβλημα επειδή η εξίσωση (5.1) θέλουμε να επαληθευεται για και $x \in (0,l)$ οχι για $x \in [0,l]$.

Έστω ότι η σειρά (5.10) είναι δυο φορές παραγωγίσιμη όρο προς όρο ως προς t και ως προς x (δηλαδή οι σειρές που προκύπτουν από την παραγώγιση συγκλίνουν ομοιόμορφα). Προφανώς η $u(t,x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας την (5.10) στην εξίσωση (5.1) και λαμβάνοντας υπ' οψιν την (5.11) έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) \Big) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

ή

$$u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} u_k(t) = f_k(t). \tag{5.12}$$

Λόγω αρχικών συνθηκών επιπλέον έχουμε (βλ. (5.7))

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

$$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0) \sin \frac{k\pi}{l} x = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

δηλαδή

$$u_k(0) = a_k, \;\; u_k'(0) = b_k. \tag{5.13}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (5.12) είναι

$$u_k(t) = C_{1k} cos \frac{k\pi}{l} t + C_{2k} \sin \frac{k\pi}{l} t + \frac{l}{k\pi} \int_0^t f_k(\tau)\, \sin \frac{k\pi}{l}(t-\tau) d\tau, \tag{5.14}$$

$k = 1, 2, \dots$. Για να επαληθεύει η $u_k(t)$ τις συνθήκες (5.13), πρέπει

$$C_{1k} = a_k, \;\; C_{2k} = \frac{l}{k\pi} b_k.$$

Πράγματι άπο (5.14), (5.13) έχουμε

$$u_k(0) = C_{1k} = a_k, \;\; u_k'(0) = \frac{k\pi}{l} C_{2k} = b_k.$$

Άρα η λύση του προβλήματος (5.12), (5.13) δίνεται άπο τον τύπο

$$u_k(t) = a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau,$$

$k = 1, 2, \ldots.$ και η λύση του προβλήματος $Cauchy - Dirichlet$ για την εξίσωση (5.1) είναι η εξής

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k \sin\frac{k\pi}{l}t\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{5.15}$$

υπό την προϋπόθεση οτι και η δεύτερη σειρά στην σχέση (5.15) συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν θα παραγωγίσουμε την δεύτερη σειρά όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή ως προς t (η απόδειξη της σύγκλισης είναι παρόμοια με αυτήν των σειρών (5.7), (5.8)).

Παρατήρηση. Επειδή είναι δύσκολο να θυμάται κανείς τον τύπο (5.15) καλύτερα να θυμάστε την διαδικασία η οποία μας οδήγησε σε αυτόν.

Παράδειγμα 5.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin\,x,\ \ (t,x)\in(-\infty,\infty)\times(0,\pi),$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t\in(-\infty,\infty),$$
$$u(0,x) = \sin\,x,\ \ u_t(0,x) = \sin 3x,\ \ x\in(0,\pi).$$

Λύση. Αντικαθιστόντας την σειρα

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\,kx$$

στην εξίσωση για $u_k(t)$ έχουμε

$$u_1'' + u_1 = 1,\ \ u_1(0) = 1,\ \ u_1'(0) = 0,$$
$$u_3'' + 9u_3 = 0,\ \ u_3(0) = 0,\ \ u_3'(0) = 1,$$
$$u_k'' + k^2 u_k = 0,\ \ u_k(0) = 0,\ \ u_k'(0) = 0,\ \ k\neq 1,2.$$

Άρα

$$u_1(t)\equiv 1,\ \ u_3(t) = \frac{1}{3}\sin 3t,\ \ u_k(t)\equiv 0\ \ k\neq 1,2$$

και

$$u(t,x) = \sin\,x + \frac{1}{3}\sin 3t\,\sin 3x.$$

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν θα αντικαταστήσουμε στην σειρά (3.15) $a_1 = 1, a_k = 0$ για $k > 1$, $b_3 = 1$, $b_k = 0$ για $k\neq 3$, $f_1 = 1$, $f_k = 0$ για $k > 1$.

Παράδειγμα 5.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 1\ \text{ στο }\ Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ \ u(0,x) = u_t(0,x) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $\phi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$, άρα $a_k = b_k = 0$ $\forall k$ και (από τον τύπο 4.15)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{k}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\Big]\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Αφού $f(t,x) \equiv 1$, έχουμε

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\,kx\,dx = \frac{2}{k\pi}[1 - cos\,k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } \ k-\text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{αν ο } \ k-\text{περιττός}, \end{cases}$$

Συνεπώς η λύση είναι

$$u(t,x) = \sum_{k=1(k-\text{περιττά})}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2}\int_0^t \sin\,k(t-\tau)\,d\tau\,\sin\,kx =$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1-cos(2m+1)t}{(2m+1)^3}\sin(2m+1)x.$$

Ή αλλιώς αντικαθιστούμε την σειρά

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\,kx$$

στην εξίσωση, για $u_k(t)$ έχουμε

$$u_k'' + k^2u_k = 0,\ \ u_k(0) = 0,\ \ u_k'(0) = 0,\ \ k = 2m,\ \ m = 1,2,...,$$

$$u_k'' + k^2u_k = \frac{4}{k\pi},\ \ u_k(0) = 0,\ \ u_k'(0) = 0,\ \ k = 2m+1,\ \ m = 1,2,...\ \ .$$

Συνεπώς

$$u_k \equiv 0,\ \ k = 2m,\ \ m = 1,2,...,$$

$$u_k = \frac{4}{\pi k^3}(1 - cos\,kt),\ \ k = 2m+1,\ \ m = 1,2,...\ \ ,$$

Άρα

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1-cos(2m+1)t}{(2m+1)^3}\sin(2m+1)x.$$

Παράδειγμα 5.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin\,x + 2,\ \ (t,x) \in (-\infty, infty) \times (0,\pi),$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = t^2,\qquad t \in (-\infty,\infty),$$
$$u(0,x) = \sin x,\ \ u_t(0,x) = \sin 3x,\ \ x \in (0,\pi).$$

Λύση. Εφόσον οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι μηδενικές, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$v = u - \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t^2 - \frac{x}{\pi}t^2 = u - t^2\ \ (u = v + t^2).$$

Έχουμε

$$v_{tt} - v_{xx} = \sin\,x,\ \ (t,x) \in (-\infty,\infty) \times (0,\pi),$$
$$v(t,0) = v(t,\pi) = 0,\qquad t \in (-\infty,\infty),$$

$$v(0,x) = \sin x, \quad v_t(0,x) = \sin 3x, \quad x \in (0,\pi).$$

Άρα (βλ. Παράδειγμα 5.2)

$$v(t,x) = \sin\, x + \frac{1}{3}\sin 3t\, \sin 3x$$

και

$$u(t,x) = \sin\, x + \frac{1}{3}\sin 3t\, \sin 3x + t^2.$$

Θα αποδείξουμε τωρα ότι η λύση του προβλήματος (5.1) - (5.3) είναι μοναδική. Έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad u(t,0) = u(t,l) = 0,$$
$$v_{tt} - v_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T,$$
$$v(0,x) = \phi(x), \quad v_t(0,x) = \psi(x), \quad v(t,0) = v(t,l) = 0.$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w = u - v$. Προφανώς

$$w_{tt} - w_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T,$$
$$w(0,x) = w_t(0,x) = w(t,0) = w(t,l) = 0.$$

Για την

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^l \big(w_t^2 + w_x^2\big)dx$$

έχουμε

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \big(w_t w_{tt} + w_x w_{xt}\big)dx =$$
$$\int_0^l w_t w_{tt}\, dx + w_x w_t\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l w_t w_{xx}\, dx = \int_0^l w_t(w_{tt} - w_{xx})dx = 0.$$

Εδω χρησιμοποιήσαμε οτι $w_t(t,0) = w_t(t,l) = 0$ (επειδή $w(t,0) = w(t,l) = 0$). Προφανώς $E(0) = 0$, άρα $E(t) = 0$ (αφού και $E'(t) = 0$), τουτ έστιν

$$w_t(t,x) = w_x(t,x) = 0.$$

Συνεπώς $w(t,x)$ = σταθερά και επειδή $w(0,x) = 0$ έχουμε $w = 0$ δηλαδή $u = v$.

Ασκήσεις.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων.

1.
$$u_{tt} - u_{xx} = 2\big(1 - \frac{2x}{\pi}\big) \ \text{για} \ |t| < \infty, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = t^2 \ \text{για} \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \sin\, x, \ \ u_t(0,x) = \sin\, x \ \text{για} \ 0 < x < \pi.$$

2.
$$u_{tt} - u_{xx} = 2\frac{x}{\pi} \ \text{για} \ |t| < \infty, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u(t,0) = 0, \ \ u(t,\pi) = t^2 \ \text{για} \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \sin\, 2x, \ \ u_t(0,x) = \sin\, 3x \ \text{για} \ 0 < x < \pi.$$

3.
$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{για} \ |t| < \infty, 0 < x < \pi$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \sin\, x + \sin 2x \ \ u_t(0,x) = \sin\, 2x + \sin 3x, \ \ 0 < x < \pi.$$

4.
$$u_{tt} - u_{xx} = 2\sin\, x + \sin 2x + \sin 3x \ \text{για} \ |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = 0 \ \ u_t(0,x) = 0 \ \ 0 < x < \pi.$$

5.
$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{2}\sin\, x \ \text{για} \ |t| < \infty, 0 < x < \pi$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \sin\, x + \sin 2x \ \ u_t(0,x) = \sin\, 2x + \sin 3x, \ \ 0 < x < \pi.$$

§6. Συνοριακές συνθήκες Neumann

Συνοπτικά θα εφαρμόσουμε την μέθοδο *Fourier* στην περίπτωση συνοριακών συνθηκών **Neumann**. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l,$$
$$u_x(t,0) = \nu_1(t), \;\; u_x(t,l) = \nu_2(t) \text{ για } |t| < \infty$$

με

$$\phi'(0) = \nu_1(0), \;\; \psi'(0) = \nu_1'(0), \quad \phi'(l) = \nu_2(0), \;\; \psi'(l) = \nu_2'(0).$$

Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα μπορούμε να πάρουμε

$$\nu_1(t) \equiv \nu_2(t) \equiv 0.$$

Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση

$$v(t,x) = u(t,x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1(t) - \frac{x^2}{2l}\nu_2(t).$$

Προφανώς

$$v_{tt} - v_{xx} = f_1(t,x) \equiv$$
$$f(t,x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1''(t) - \frac{x^2}{2l}\nu_2''(t) - \frac{1}{l}\nu_1(t) + \frac{1}{l}\nu_2(t)$$

και

$$v_x(t,0) = v_x(t,l) = 0 \;\; \forall t,$$

επίσης

$$v(0,x) = \phi_1(x) \equiv \phi(x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1(0) - \frac{x^2}{2l}\nu_2(0),$$
$$v_t(0,x) = \psi_1(x) \equiv \psi(x) + \frac{l}{2}\big(1 - \frac{x}{l}\big)^2 \nu_1'(0) - \frac{x^2}{2l}\nu_2'(0),$$
$$\phi_1(0) = \phi_1(l) = 0, \quad \psi_1(0) = \psi_1(l) = 0.$$

Άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) \text{ στο } Q_T \tag{6.1}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \text{ για } 0 < x < l \tag{6.2}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \text{ για } |t| < \infty \tag{6.3}$$

με

$$\phi'(0) = \phi'(l) = \psi'(0) = \psi'(l) = 0.$$

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση $f(t,x) \equiv 0$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T \tag{6.4}$$

Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$T(t)X(x) \not\equiv 0.$$

Παρομοίως με την προηγούμενη περίπτωση καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; X'(0) = X'(l) = 0 \tag{6.5}$$

και

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{6.6}$$

Για

$$\lambda_k = \Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

υπάρχει μη τετριμμένη λύση του προβλήματος (6.5):

$$X_k(x) = cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Προφανώς για $\lambda = \lambda_k$ η (6.6) μας δίνει

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t \;\; \text{αν} \;\; k = 0$$

και

$$T_k(t) = A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t \;\; \text{για} \;\; k = 1, 2, ...,$$

όπου A_k, B_k αυθαίρετες σταθερές. Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

$$T_k(t)\, X_k(x) = \big(A_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi}{l}t\big) cos\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

λύνουν την εξίσωση (6.4) και επαληθεύουν τις συνθήκες (6.3). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x),$$

εφ' όσον συγκλίνει μαζί με τις δεύτερες παραγώγους (αν την παραγωγίζουμε όρο προς όρο). Πρέπει τώρα να ικανοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (6.2). Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\phi(x)$ και $\psi(x)$ άρτια στο $(-l, 0)$ και μετά περιοδικά με περίοδο $2l$ στον $\mathbf{R}$. Τις γράφουμε σε μορφή σειράς $Fourier$:

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$\psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \phi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} \phi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \psi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} \psi(x)\, cos\frac{k\pi}{l}xdx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Έχουμε ότι αν η σειρά αυτή συγκλίνει όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν την παραγωγίσουμε δυο φορές όρο προς όρο ως προς t ή ως προς x, τότε η $u(t,x)$ επαλήθεύει την εξίσωση (6.4) και τις συνοριακές συνθήκες (6.3). Για να επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες (6.2) επιλέγουμε τις σταθερές A_k και B_k με τον ακόλουθο τρόπο. Για την επιλογή των A_k έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\, cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u(0,x) = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \text{ και } A_k = a_k \text{ για } k > 1.$$

Για την επιλογή των B_k έχουμε

$$u_t(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)\, cos\frac{k\pi}{l}x = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

από την άλλη θέλουμε

$$u_t(0,x) = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

συνεπώς παίρνουμε

$$B_0 = \frac{b_0}{2}, \quad B_k = \frac{l}{k\pi} b_k \text{ για } k = 1, 2, \ldots.$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα (υπό την προϋπόθεση σύγκλισης των σειρών) ότι η λύση του προβλήματος (6.4), (6.2), (6.3) δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k\, cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi} b_k \sin\frac{k\pi}{l}t] cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{6.7}$$

Παράδειγμα 6.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ στο } Q_T = \{t,x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(0,x) = cos\, x, \quad u_t(0,x) = cos\, 2x,$$
$$u_x(0,x) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$\phi(x) = cos\, x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, cos\, kx,$$

$$\psi(x) = cos\, 2x = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, cos\, kx,$$

άρα $a_1 = 1$, $a_i = 0$ για $i \neq 1$, $b_2 = 1$, $b_j = 0$ για $j \neq 2$. Συνεπώς η συνάρτηση

$$u(t,x) = cos\, t\, cos\, x + \frac{1}{2} \sin 2t\, cos\, 2x$$

είναι λύση του προβλήματος.

Παρομοίως με την περίπτωση του προβλήματος $Cauchy - Dirichlet$ παρατηρούμε οτι αυτό που κάναμε μπορούμε να το δούμε και ως εξής: ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (τριγωνομετρική σειρά)

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{6.8}$$

και προσδιορίζουμε τις συναρτήσεις $u_k(t)$ αντικαθιστώντας την (6.8) στην (6.4) και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες (6.2)

Θα εφαρμόσουμε αυτη τη προσέγγιση σε πιο γενική περίπτωση. Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα (6.1) - (6.3). Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή σειράς $Fourier$ (6.8). Γράφουμε την $f(t,x)$ σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x \tag{6.9}$$

όπου

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(t,x)dx, \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\, cos\frac{k\pi}{l}x\, dx \;\text{ για }\; k = 1, 2, \ldots.$$

Έστω ότι η σειρά (6.8) είναι δυο φορές παραγωγίσιμη όρο προς όρο ως προς t και ως προς x (δηλαδή οι σειρές που προκύπτουν από την παραγώγιση συγκλίνουν ομοιόμορφα). Προφανώς η $u(t,x)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Αντικαθιστώντας την (6.8) στην εξίσωση (6.1) και λαμβάνοντας υπ' οψιν την (6.9) έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big) cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) cos\frac{k\pi}{l}x$$

ή

$$u_k''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t) = f_k(t). \tag{6.10}$$

Λόγω αρχικών συνθηκών επιπλέον έχουμε

$$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(0) cos\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_t(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(0) cos\frac{k\pi}{l}x = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k cos\frac{k\pi}{l}x,$$

δηλαδή

$$u_0(0) = \frac{a_0}{2}, \;\; u_0'(0) = \frac{b_0}{2}, \;\; u_k(0) = a_k, \;\; u_k'(0) = b_k \text{ για } \; k = 1, 2, \ldots. \tag{6.11}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (6.10) είναι

$$u_0(t) = C_{10} + C_{20}t + \int_0^t\int_0^\tau f_0(\xi)d\xi d\tau,$$

(6.12)

$$u_k(t) = C_{1k}cos\frac{k\pi}{l}t + C_{2k}\sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)d\tau,\ \ k = 1, 2, ...$$

Για να επαληθεύει η $u_k(t)$ τις συνθήκες (6.11), πρέπει

$$C_{10} = \frac{a_0}{2},\ \ C_{20} = \frac{b_0}{2},\ \ C_{1k} = a_k,\ \ C_{2k} = \frac{l}{k\pi}b_k\ \text{ για }\ k = 1, 2, ...$$

Πράγματι άπο (6.11), (6.12) έχουμε

$$u_k(0) = C_{1k} = a_k,\ \ u'_k(0) = \frac{k\pi}{l}C_{2k} = b_k.$$

Αρα η λύση του προβλήματος (6.10), (6.11) δίνεται άπο τον τύπο

$$u_0(t) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \int_0^t\int_0^\tau f_0(\xi)d\xi d\tau,$$

$$u_k(t) = a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k\sin\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau,\ \ k = 1, 2, ...$$

και η λύση του προβλήματος $Cauchy - Neumann$ για την εξίσωση (6.1) είναι η εξής

$$u(t, x) = \frac{a_0 + b_0 t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k cos\frac{k\pi}{l}t + \frac{l}{k\pi}b_k\sin\frac{k\pi}{l}t\Big]cos\frac{k\pi}{l}x +$$

(6.13) $$\int_0^t\int_0^\tau f_0(\xi)d\xi d\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{l}{k\pi}\int_0^t f_k(\tau)\,\sin\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\Big]cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Παράδειγμα 6.2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = cos\,x\ \text{ στο }\ Q_T = \{t, x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0,$$

$$u(0, x) = 3\cos 3x,\ \ u_t(0, x) = \cos 2x.$$

Λύση. Έχουμε $f_1 = 1$, $a_3 = 3$, $b_2 = 1$ τα υπόλοιπα μηδέν, άρα (βλ. (6.13))

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\sin\,2t cos\,2x + 3cos\,3t\,cos3x + (1 - cos\,t)cos\,x.$$

Ή αλλιώς

$$u''_1(t) + u_1(t) = 1,\ \ u_1(0) = 0,\ \ u'_1(0) = 0,$$

$$u''_2(t) + 4u_2(t) = 0,\ \ u_2(0) = 0,\ \ u'_2(0) = 1,$$

$$u''_3(t) + 9u_3(t) = 0,\ \ u_3(0) = 3,\ \ u'_3(0) = 0$$

και

$$u''_k(t) + u_k(t) = 0,\ \ u_k(0) = 0,\ \ u'_k(0) = 0\ \ k \neq 1, 2, 3.$$

Προφανώς

$$u_1 = 1 - cos\,t,\ \ u_2 = \frac{1}{2}\sin\,2t,\ \ u_3 = 3cos\,3t,\ \ u_k \equiv 0\ \ k \neq 1, 2, 3.$$

συνεπώς

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x.$$

Παράδειγμα 6.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = cos\, x + 2x - \pi \ \text{ στο } \ Q_T = \{t, x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = t^2,$$
$$u(0,x) = 3cos 3x, \ \ u_t(0,x) = cos 2x.$$

Λύση. Αφού οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι μηδέν εισάγουμε την συνάρτηση

$$v = u + \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t^2 - \frac{x^2}{2\pi} t^2$$

η οποία επαλήθεύει την εξίσωση

$$v_{tt} - v_{xx} = cos\, x$$

και τις συνθήκες

$$u(0,x) = 3cos 3x, \ \ u_t(0,x) = cos 2x, \ \ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,$$

άρα (βλ. Παράδειγμα 6.2)

$$v = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x,$$

και

$$u = \frac{1}{2}\sin\, 2t cos\, 2x + 3cos\, 3t\, cos 3x + (1 - cos\, t) cos\, x + \big(x - \frac{\pi}{2}\big) t^2.$$

Παράδειγμα 6.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} = 1 \ \text{ στο } \ Q_T = \{t, x) : |t| < \infty, 0 < x < \pi\}$$
$$u(0,x) = 2, \ \ u_t(0,x) = 1/2,$$
$$u_x(0,x) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $\phi(x) \equiv 2 = a_0/2, \ \ \psi(x) \equiv 1/2 = b_0/2,$

$$f_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dx = 1$$

άρα

$$u(t,x) = \frac{4+t}{2} + \int_0^t \int_0^\tau 1 d\xi\, d\tau = \frac{t^2 + t + 4}{2}.$$

Παρατήρηση. Παρομοίως αντιμετωπίζεται και η γενική περίπτωση συνοριακών συνθηκών

$$\alpha_1 u_x(t,0) + \alpha_2 u(t,0) = \nu_1(t), \ \ \beta_1 u_x(t,l) + \beta_2 u(t,l) = \nu_2(t),$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \ \ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (6.1) - (6.3).

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων.

2.
$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \ \text{για} \ |t| < \infty, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \ \text{για} \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \cos\, x + \cos 3x, \ \ u_t(0,x) = 2\cos 2x + \cos 4x \ \text{για} \ 0 < x < \pi.$$

3.
$$u_{tt} - u_{xx} = \cos\, x + \cos 2x + \cos 3x \ \text{για} \ |t| < \infty, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \ \text{για} \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = \cos\, x, \ \ u_t(0,x) = 0 \ \text{για} \ 0 < x < \pi.$$

4.
$$u_{tt} - u_{xx} = \big(x - \frac{\pi}{2}\big) \cos\, t \ \text{για} \ |t| < \infty, 0 < x < \pi$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 1 - \cos\, t, \ \ |t| < \infty,$$
$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0, \ \ 0 < x < \pi.$$

§7. Εξίσωση Θερμότητας

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα $Cauchy - Dirichlet$: να βρεθεί η λύση της εξίσωσης θερμότητας

(7.1) $$u_t - u_{xx} = f(t,x) \text{ για } t > 0,\ \ 0 < x < l$$

η οποία επαληθεύει την αρχική συνθήκη

(7.2) $$u(0,x) = \phi(x),\ \ 0 < x < l,$$

και τις συνοριακές συνθήκες

(7.3) $$u(t,0) = u(t,l) = 0,\ \ t > 0.$$

Εδώ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θεωρούμε μηδενικές συνοριακες συνθήκες χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα. Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο $Fourier$. Ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

(7.4) $$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά (7.4) συγκλίνει ομοιόμορφα όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε την (7.4) όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή ως προς t. Προφανώς

$$u(t,0) = u(t,l) = 0.$$

Γράφοντας το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (7.1) σε μορφή

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x,\ \ f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

και αντικαθιστώντας την (7.4) στην (7.1) παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big)\sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Άρα θέλουμε να ισχύει

(7.5) $$u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t) = f_k(t),\ \ k = 1,2,...$$

Επίσης έχουμε

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x,\ \ a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx,$$

άρα για να επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (7.2) πρέπει να ισχύει

(7.6) $$u_k(0) = a_k,\ \ k = 1,2,...$$

Πράγματι

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin\frac{k\pi}{l}x = \phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Έστω $f(t,x) \equiv 0$, τότε

$$u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, ... \tag{7.7}$$

και η λύση του προβλήματος (7.7), (7.6) είναι

$$u_k(t) = a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7.1) - (7.3) για $f(t,x) \equiv 0$ δίνεται από τον τύπο

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{7.8}$$

υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και πρώτης ως προς t.

Το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν ακολουθήσουμε την διαδικασία με την οποια ξεκινήσαμε στην $\S 5$: ψάχνουμε αν υπάρχει λύση της $u_t - u_{xx} = 0$ της μορφής $T(t)X(x) \not\equiv 0$. Η $X(x)$ θα είναι λύση του προβλήματος (5.5) αρα $X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$ και για την $T(t)$ θα έχουμε $T'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0$ αρα $T_k(t) = a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}$.

Παράδειγμα 7.1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = 0 \ \text{ για } \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$

$$u(0,x) = \sin x, \ \ u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$, συνεπώς απο (7.8)

$$u(t,x) = e^{-t}\sin x.$$

Ή αλλιώς απο (7.5), (7,6)

$$u_1' + u_1 = 0, \ \ u_1(0) = 1 \ \ \Rightarrow \ \ u_1 = e^{-t},$$

και για $k > 1$

$$u_k' + k^2u_k = 0, \ \ u_k(0) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ u_k \equiv 0.$$

Έστω τώρα $f(t,x) \not\equiv 0$. Η γενική λύση της (7.5) είναι

$$u_k(t) = C_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} + e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\int_0^t f_k(\tau)e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau}d\tau,$$

και την αυθαίρετη σταθερά C_k την προσδιορίζουμε άπο την (7.6):

$$u_k(0) = C_k = a_k.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7.1) - (7.3) δίνεται από τον τύπο

(7.9)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\int_0^t f_k(\tau)e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau}d\tau \sin\frac{k\pi}{l}x$$

(πάντα υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και πρώτης ως προς t).

Παράδειγμα 7.2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = \sin 2x + 1 - \frac{x}{\pi} \text{ για } t > 0, \ 0 < x < \pi$$
$$u(t,0) = t, \ u(t,\pi) = 0,$$
$$u(0,x) = \sin x.$$

Λύση. Για την

$$v(t,x) = u(t,x) - \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t$$

έχουμε

$$v_t - v_{xx} = \sin 2x \text{ για } t > 0, \ 0 < x < \pi$$
$$v(t,0) = v(t,\pi) = 0,$$
$$v(0,x) = \sin x.$$

Λύνουμε αυτό το πρόβλημα. Έχουμε $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$, επίσης $f_1 = 0$, $f_2 = 1$ και $f_k = 0$ για $k > 2$. Άρα έχουμε για την v_1:

$$v_1'(t) + v_1(t) = 0, \ v_1(0) = 1,$$

για την v_2:

$$v_2'(t) + 4v_2(t) = 1, \ v_2(0) = 0,$$

για τις v_k, $k > 2$:

$$v_k'(t) + k^2 v_k(t) = 0, \ v_k(0) = 0.$$

Συνεπώς

$$v_1(t) = e^{-t}, \ v_2(t) = \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big), \ v_k(t) \equiv 0 \text{ για } k > 2.$$

Η λύση του προβλήματος (για την v) είναι

$$v(t,x) = e^{-t} \sin x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big) \sin 2x,$$

και η λύση του αρχικού προβλήματος

$$u(t,x) = e^{-t} \sin x + \frac{1}{4}\big(1 - e^{-4t}\big) \sin 2x + \big(1 - \frac{x}{\pi}\big)t.$$

Παράδειγμα 7.3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = t, \text{ για } t > 0, \ 0 < x < \pi$$
$$u(0,x) = \sin x, \ u(t,0) = u(t,\pi) = 0.$$

Λύση. Προφανώς $a_1 = 1$, $a_k = 0$ για $k > 1$ και

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t \sin kx \, dx = t\frac{2}{k\pi}[1 - cos\, k\pi] = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } k - \text{άρτιος} \\ \frac{4}{k\pi}t, & \text{αν ο } k - \text{περιττός,} \end{cases}$$

Έχουμε για την u_1:

$$u_1'(t) + u_1(t) = \frac{4t}{\pi}, \ u_1(0) = 1,$$

για τις u_k με $k = 3, 5, 7 ...$:

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = \frac{4t}{k\pi}, \ u_k(0) = 0,$$

για τις u_k με $k = 2, 4, 6, ...$:

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = 0.$$

Συνεπώς

$$u_1(t) = e^{-t} + \frac{4}{\pi}(t - 1 + e^{-t}),$$

$$u_k(t) = \frac{4}{k^3\pi}\Big(t - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}e^{-k^2 t}\Big), \text{ για } k = 3, 5, 7, ...,$$

$$u_k(t) = 0 \text{ για } k = 2, 4, 6, ...$$

Άρα λύση του προβλήματος είναι

$$u(t, x) =$$

$$\Big(e^{-t} + \frac{4}{\pi}\big(t - 1 + e^{-t}\big)\Big) \sin x + \sum_{k=3(k-\text{περιττά})}^{\infty} \frac{4}{k^5\pi}\big(k^2 t - 1 + e^{-k^2 t}\big) \sin kx =$$

$$\Big(e^{-t}+\frac{4}{\pi}\big(t-1+e^{-t}\big)\Big) \sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+1)^2 t - 1 + e^{-(2m+1)^2 t}}{(2m+1)^5} \sin(2m+1)x =$$

$$e^{-t} \sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)^2 t - 1 + e^{-(2m+1)^2 t}}{(2m+1)^5} \sin(2m+1)x.$$

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση (7.1) με αρχική συνθήκη (7.2) και τις συνοριακές συνθήκες $Neumann$ (θεωρούμε μηδενικές συνοριακες συνθήκες χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα)

$$u_x(t, 0) = u_x(t, l) = 0, \quad t > 0. \tag{7.10}$$

Παρομοίως με την κυματική εξίσωση ακολουθούμε την εξής διαδικασία: ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x. \tag{7.11}$$

Υποθέτουμε ότι η σειρά (7.11) συγκλίνει ομοιόμορφα όπως επίσης και οι σειρές που προκύπτουν αν παραγωγίσουμε την (7.11) όρο προς όρο δυο φορές ως προς x ή μια ως προς t. Κάνουμε άρτια και έπειτα περιοδική επέκταση των f και ϕ. Γράφοντας το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (7.1) σε μορφή

$$f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$f_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(t, x)dx \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t, x) cos\frac{k\pi}{l}x\, dx \quad k = 1, 2, ...$$

και αντικαθιστώντας την (7.9) στην (7.1) παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(u_k'(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}u_k(t)\Big) cos\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\, cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Άρα προσδιορίζουμε τις $u_k(t)$ από την (7.5) (με $k = 0, 1, 2, ...$), επίσης έχουμε

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{k\pi}{l}x, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x) cos\frac{k\pi}{l}x\, dx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

άρα για να επαληθεύεται η αρχική συνθήκη (7.2) πρέπει να ισχύει

$$u_0(0) = \frac{a_0}{2}, \quad u_k(0) = a_k \ \text{ για } \ k = 1, 2, ...$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (7.1), (7.2), (7.10) δίνεται από τον τύπο

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t} cos\frac{k\pi}{l}x + \int_0^t f_0(\tau)d\tau +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}\int_0^t f_k(\tau)e^{\frac{k^2\pi^2}{l^2}\tau}d\tau cos\frac{k\pi}{l}x.$$

Παράδειγμα 7.4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = cos\, 3x \ \text{ για } \ t > 0, \quad 0 < x < \pi$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad u(0, x) = 0.$$

Λύση. Έχουμε $a_k = 0\ \forall k$, επίσης $f_3 = 1$ και $f_k = 0$ για $k \neq 3$. Άρα έχουμε για την u_3:

$$u_3'(t) + 9u_3(t) = 1, \quad u_3(0) = 0,$$

και

$$u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = 0,$$

για $k \neq 3$. Συνεπώς

$$u_k(t) \equiv 0 \ \text{ για } \ k \neq 3, \quad u_3(t) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big).$$

Η λύση του προβλήματος είναι

$$u(t, x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x.$$

Παράδειγμα 7.5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t - u_{xx} = \cos 3x + \frac{t}{\pi} - \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2$$

$$u_x(t, 0) = t, \quad u_x(t, \pi) = 0,$$

$$u(0, x) = 0.$$

Λύση. Για την

$$v(t, x) = u(t, x) + \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t$$

έχουμε

$$v_t - v_{xx} = \cos 3x,$$

$$v_x(0, x) = t, \quad v_x(t, \pi) = 0,$$

$$v(0, x) = 0.$$

Η λύση αυτού του προβλήηματος είναι (βλ. παράδειγμα 7.4)

$$v(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x$$

άρα

$$u(t,x) = \frac{1}{9}\big(1 - e^{-9t}\big) cos\, 3x - \frac{\pi}{2}\big(1 - \frac{x}{\pi}\big)^2 t.$$

Θα αποδείξουμε τωρα ότι η λύση του προβλήματος (7.1) - (7.3) είναι μοναδική. Έστω υπάρχουν δυο λύσεις $u(t,x)$ και $v(t,x)$:

$$u_t - u_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T,$$
$$u(0,x) = \phi(x), \ \ u(t,0) = u(t,l) = 0,$$
$$v_t - v_{xx} = f(t,x) \ \text{ στο } \ Q_T,$$
$$v(0,x) = \phi(x), \ \ v(t,0) = v(t,l) = 0.$$

Θεωρούμε τη διαφορά $w = u - v$. Προφανώς

$$w_t - w_{xx} = 0 \ \text{ στο } \ Q_T, \tag{7.12}$$
$$w(0,x) = w(t,0) = w(t,l) = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε την (7.12) με w και ολοκληρώνουμε ως προς x:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2 dx - \int_0^l w_{xx} w dx = 0.$$

Ολοκληρώνοντας κατα μερη παιρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2 dx - w_x w\Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l w_x^2 dx = 0$$

άρα

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2 dx + \int_0^l w_x^2 dx = 0$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση αυτή ως προς t και έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_0^l w^2 dx + \int_0^t \int_0^l w_x^2 dx = 0,$$

συνεπώς $w = 0$ δηλαδή $u = v$.

Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης του του προβλήματος (7.1), (7.10), (7.3) είναι ίδια.

Ασκήσεις

1. Προσδιορίστε την αντικατάσταση η οποία ανάγει την εξίσωση

$$u_t - ku_{xx} = f(t,x), \quad k > 0 \ \text{σταθερά}$$

στην εξίσωση

$$u_t - u_{yy} = f(t,y).$$

2. Εστω οτι η $u(t,x)$ είναι λύση της εξίσωσης (7.1) η οποια επαληθευει την αρχική συνθήκη (7.2) και συνοριακές συνθήκες

$$u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t).$$

Προσδιορίστε την εξίσωση και τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες που επαληθευει η συνάρτηση

$$v(t,x) = u(t,x) - \big(1 - \frac{x}{l}\big)\mu_1(t) - \frac{x}{l}\mu_2(t).$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο $Fourier$ προσδιορίστε τη λύση των προβλημάτων:

3.

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = t^2 \sin x \ \text{για} \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \text{για} \ t > 0, \\ u(0,x) = \sin 2x \ \text{για} \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

4.

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = 2 \sin x \cos x \ \text{για} \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \text{για} \ t > 0, \\ u(0,x) = \sin x + \sin 3x \ \text{για} \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

5.

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = \frac{t^2}{2} \cos x \ \text{για} \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \ \text{για} \ t > 0, \\ u(0,x) = \cos x \ \text{για} \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

6.

$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{x^2}{2\pi} - \frac{t}{\pi}, \ \text{για} \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi, \\ u_x(t,0) = 0, \ \ u_x(t,\pi) = t \ \text{για} \ t > 0, \\ u(0,x) = \frac{1}{2} \cos x \ \text{για} \ 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

§8. Εξίσωση *Laplace*

Θα εφαρμόσουμε τωρα την μέθοδο *Fourier* για την εξίσωση *Laplace* σε δυο περιπτώσεις, πρώτη περίπτωση όταν το χωρίο είναι ένας δίσκος και δευτερη όταν το χωρίο είναι ένα ορθογώνιο.

1. Έστω οτι το χωρίο είναι ένας δίσκος με κέντρο στο μηδέν και ακτίνα R.

1α) Πρόβλημα *Dirichlet*.

Θέλουμε να βρουμε τη λύση της εξίσωσης

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ στο } \ r = \sqrt{x^2 + y^2} < R \tag{8.1}$$

η οποία επαληθεύει τη συνοριακή συνθήκη

$$u\Big|_{r=R} = g(\theta), \quad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{8.2}$$

όπου g δοσμένη συνάρτηση. Εδω θα χρειαστούμε δυο θεωρήματα τα οποια θα τα δώσουμε χωρίς απόδειξη.

Πρώτο Θεώρημα του $Harnack$**.** *Αν η ακολουθία αρμονικών στο Ω συναρτήσεων $\{u_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (βλ. σελιδα 75) στην συνάρτηση u στο Ω, τότε η u είναι αρμονική.*

Δεύτερο Θεώρημα του $Harnack$**.** *Έστω ότι η ακολουθία αρμονικών στο Ω συναρτήσεων $\{u_n\} \in C^0(\bar{\Omega})$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\partial\Omega$. Τότε $\{u_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω (και το όριο είναι αρμονική συνάρτηση).*

Έστω $g \in C^1[0, 2\pi]$, $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$, τότε

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi) cos\, k\psi d\psi, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\sin\, k\psi\, d\psi\; k = 0, 1, 2, \dots.$$

Έχουμε

$$\lim_{m\to\infty} \max_{\theta} |g(\theta) - T_m(\theta)| = 0$$

όπου

$$T_m(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big),$$

λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς *Fourier*. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$u_m(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \Big(\frac{r}{R}\Big)^k \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big),$$

($x = r\, cos\,\theta$, $y = r\sin\,\theta$). Οι συναρτήσεις $r^k cos\, k\theta$ και $r^k \sin\, k\theta$ είναι αρμονικές (ως συναρτήσεις των μεταβλητών x και y), άρα και η u_m $\forall m$ είναι αρμονική. Προφανώς

$$u_m\Big|_{r=R} = T_m(\theta).$$

Αφού η ακολουθία $T_m(\theta)$ συγκλίνει ομοιόμορφα τότε (λόγω του πρώτου και του δεύτερου θεωρήματος $Harnack$) και η ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων u_m συγκλίνει ομοιόμορφα για $r \le R$ και το όριο είναι αρμονική συνάρτηση, επίσης $u = g$ για $r = R$. Αρα η λύση δίνεται από τον τύπο

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big)$$

με $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

Παράδειγμα 8.1 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.1), (8.2) με

$$g(\theta) = 2\sin\theta + \frac{1}{2}\cos 3\theta, \quad R = 1.$$

Λύση. Προφανώς $a_k = 0\ \forall k \neq 3$, $a_3 = 1/2$, $b_1 = 2$ και $b_k = 0$ για $k \neq 1$ άρα

$$u(x,y) = \frac{r}{R} 2\sin\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{1}{2}\cos 3\theta =$$

$$2\sqrt{x^2+y^2}\Big(\sin\big(\arctan\frac{y}{x}\big) + \frac{x^2+y^2}{4}\cos\big(3\arctan\frac{y}{x}\big)\Big).$$

1β) Παρομοίως θα εξετάσουμε τωρα το πρόβλημα $Neumann$.

Θέλουμε να βρουμε τη λύση της εξίσωσης (8.1) η οποία επαληθεύει τη συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = g(\theta). \tag{8.3}$$

Εδω υπάρχουν δυο ιδιαιτερότητες σε σχέση με το πρόβλημα $Dirichlet$. Η πρώτη είναι οτι το πρόβλιμα $Neumann$ για τυχαία g μπορεί να μην έχει λύση. Πράγματι απο το θεώρημα της απόκλισης έχουμε

$$\int_{x^2+y^2<R^2} \Delta\, u dx dy = \int_{x^2+y^2<R^2} div(\nabla u) dx dy = \int_{r=R} \frac{\partial u}{\partial r} ds = \frac{1}{R}\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta,$$

συνεπώς η αναγαία συνθήκη για την υπαρξη της λύσης είναι

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 0. \tag{8.4}$$

Η δευτερη ιδιαιτερότητα είναι οτι αν η u είναι λύση του προβλήματος (8.1), (8.3) τότε και η $u + C$ με τυχαια σταθερά C είναι επίσης λύση.

Θα κατασκευάσουμε τη λύση του προβλήματος (8.1), (8.3) υπο τον περιορισμό (8.4) και με αυτο θα δείξουμε οτι η συνθήκη (8.4) είναι ικανή και αναγκαία για την υπαρξη της λύσης.

Απο την (8.4) προκύπτει οτι $a_0 = 0$, άρα η σειρά $Fourier$ για την g πρέπει να έχει τη μορφή

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big).$$

Η συνάρτηση

$$u_m(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \frac{r^k}{kR^{k-1}}\big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big)$$

επαληθευει την εξίσωση (8.1) (αφου οι συναρτήσεις $r^k \cos\, k\theta$, $r^k \sin\, k\theta$ είναι αρμονικές) και ικανοποιεί την συνθήκη

$$\frac{\partial u_m}{\partial r}\Big|_{r=R} = \tilde{T}_m(\theta) = \sum_{k=1}^{m} \big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big)$$

αφου

$$\frac{\partial u_m}{\partial r} = \sum_{k=1}^{m} \frac{r^{k-1}}{R^{k-1}}\big(a_k cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$v_m(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \frac{r^k}{kR^{k-1}}\big(a_k \sin\, k\theta - b_k \cos\, k\theta\big).$$

Προφανώς η v_m είναι αρμονική και

$$\frac{\partial u_m}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_m}{\partial \theta}$$

συνεπώς

$$\frac{\partial v_m}{\partial \theta}\Big|_{r=R} = R\tilde{T}_m(\theta)$$

απ' οπου προκύπτει οτι

$$v_m\Big|_{r=R} = R\int_0^{\theta} T_m(\phi)d\phi + C$$

με C αυθαίρετη σταθερά.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας T_m συνεπάγεται τη ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας

$$\int_0^{\theta} T_m(\phi)d\phi.$$

Αρα, απο το πρώτο και δευτερο θεώριμα $Harnack$, έχουμε μια ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων v_m που συγκλίνει ομοιόμορφα στον δίσκο $r < R$ στην αρμονική συνάρτηση

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{kR^{k-1}}\big(a_k \sin\, k\theta - b_k \cos\, k\theta\big)$$

και

$$v\Big|_{r=R} = R\int_0^{\theta} g(\phi)d\phi + C, \quad \text{επίσης} \quad \frac{\partial v}{\partial \theta}\Big|_{r=R} = Rg(\theta).$$

Θα αποδείξουμε οτι η συνάρτηση

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{kR^{k-1}}\big(a_k \cos\, k\theta + b_k \sin\, k\theta\big) \tag{8.5}$$

είναι λύση του προβλήματος (8.1), (8.3). Παρατηρούμε οτι οι u, v επαληθευουν τις

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{8.6}$$

Ευκολα διαπιστώνουμε οτι αν δυο συναρτήσεις u, v επαληθεύουν τις σχέσεις (8.6) τότε η μια είναι αρμονική αν και μόνο αν είναι αρμονική η άλλη. Έχουμε οτι η v είναι αρμονική αρα και η u εικαι αρμονική Επίσης

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = g(\theta).$$

Αρα όντως η λύση του προβλήματος (8.1), (8.3) δίνεται απο τον τυπο (8.5).

2. Έστω τώρα το χωρίο είναι ένα ορθογώνιο. Θα περιοριστούμε με το πρόβλημα *Dirichlet*.

Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις θα παρούμε το ορθογώνιο $(0, \pi) \times (0, l)$ και θα μελετήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα *Dirichlet*:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ στο } (0, \pi) \times (0, l), \tag{8.7}$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \text{ για } y \in [0, l], \tag{8.8}$$

$$u(x, 0) = \phi_1(x), \;\; u(x, l) = \phi_2(x) \text{ για } x \in [0, \pi], \tag{8.9}$$

με $\phi_i(0) = \phi_i(\pi) = 0$, $i = 1, 2$.

Ψάχνουμε τη λύση της εξίσωσης (8.7) σε μορφή

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{8.10}$$

αντικαθιστώντας την (8.10) στην (8.7) παίρνουμε

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

διαιρώντας δια XY έχουμε

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \;\; \lambda \in \mathbf{R}. \tag{8.11}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες (8.8) για την συνάρτηση $X(x)$ προκύπτει το εξής πρόβλημα

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; x \in (0, \pi), \;\; X(0) = X(\pi) = 0.$$

Μη τετριμμένες λύσεις υπάρχουν μόνο για $\lambda = \lambda_k = k^2$, $k \in \mathbf{N}$ και δίνονται ως

$$X(x) = C \sin kx, \;\; C - \text{αυθαίρετη σταθερά.}$$

Επίσης από την (8.11) έχουμε

$$Y''(y) - \lambda_k Y(y) = 0 \;\; y \in [0, l],$$

προφανώς

$$Y_k(y) = A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}, \;\; A_k, \, B_k - \text{αυθαίρετες σταθερές.}$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y) = \left(A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}\right) \sin\, kx$$

επαληθεύουν την εξίσωση (8.7) και τις συνθήκες (8.8). Το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)$$

υπό την προϋπόθεση ότι συγκλίνει και οι παράγωγοι όρο προς όρο πρώτης και δεύτερης τάξης ως προς x και y επίσης συγκλίνουν. Για να ικανοποιήσουμε τις συνθήκες (8.9) θα ακολουθήσουμε την γνωστή διαδικασία, γράφουμε

$$\phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,\sin\, kx, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi_1(x)\,\sin\, kx,$$

και

$$\phi_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,\sin\, kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi_2(x)\,\sin\, kx.$$

Θέλουμε να ισχύει το εξής

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k)\sin\, kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,\sin\, kx,$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,l) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k e^{kl} + B_k e^{-kl})\sin\, kx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,\sin\, kx,$$

άρα πρέπει

$$A_k + B_k = a_k, \quad \text{και} \quad A_k e^{kl} + B_k e^{-kl} = b_k,$$

δηλαδή

$$A_k = \frac{a_k - e^{kl} b_k}{1 - e^{2kl}}, \quad B_k = \frac{b_k - a_k e^{kl}}{1 - e^{2kl}} e^{kl}.$$

Συνεπώς η λύση του προβλήματος (8.7)-(8.9) δίνεται από τον τύπο

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - e^{kl} b_k}{1 - e^{2kl}} e^{ky} + \frac{b_k - a_k e^{kl}}{1 - e^{2kl}} e^{kl} e^{-ky} \right) \sin\, kx$$

(υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει μαζί με τις παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x και y).

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αν εξ αρχής θα ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin\, kx.$$

Παράδειγμα 8.2 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.7)-(8.9) με $l = \pi$, $\phi_1 \equiv 0$ και $\phi_2 = \sin\, x$.

Λύση. Προφανώς $a_k = 0\ \forall k$, $b_1 = 1$ και $b_k = 0$ για $k \geq 2$ άρα

$$u(x, y) = \frac{e^{\pi}\left(e^{-y} - e^{y}\right)}{1 - e^{2\pi}} \sin\, x.$$

Ασκήσεις.

1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.1), (8.2) με

$$g = 1 + 2\sin\theta\, \cos\theta.$$

2. Αποδείξτε οτι για $k = 1, 2, ...$ η συνάρτηση $r^k \cos k\theta$ με

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

επαληθευει την εξίσωση $Laplace$.

3. Αποδείξτε οτι για $k = 1, 2, ...$ η συνάρτηση $r^k \sin k\theta$ με

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

επαληθευει την εξίσωση $Laplace$.

4. Για ποιες τιμές της παραμέτρου α το πρόβλιμα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ στο } \ r = \sqrt{x^2 + y^2} < R$$

και

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \alpha + \cos\theta.$$

έχει λύση ? Προσδιορίστε τη λύση αυτη.

5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος (8.7)-(8.9) με $l = \pi$,

$$\phi_1 = \sin\, x + 2\sin 2x \ \text{ και } \ \phi_2 = \sin\, x.$$

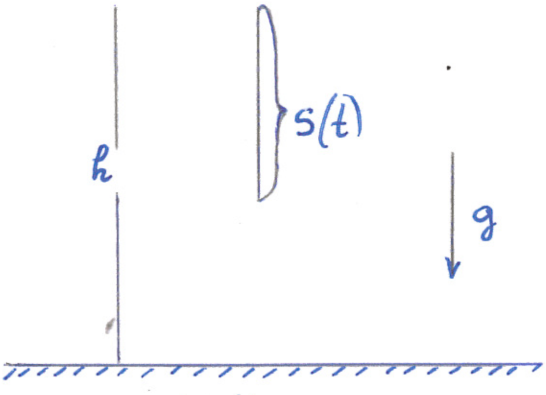
6. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ στο } \ (0, \pi) \times (0, l),$$

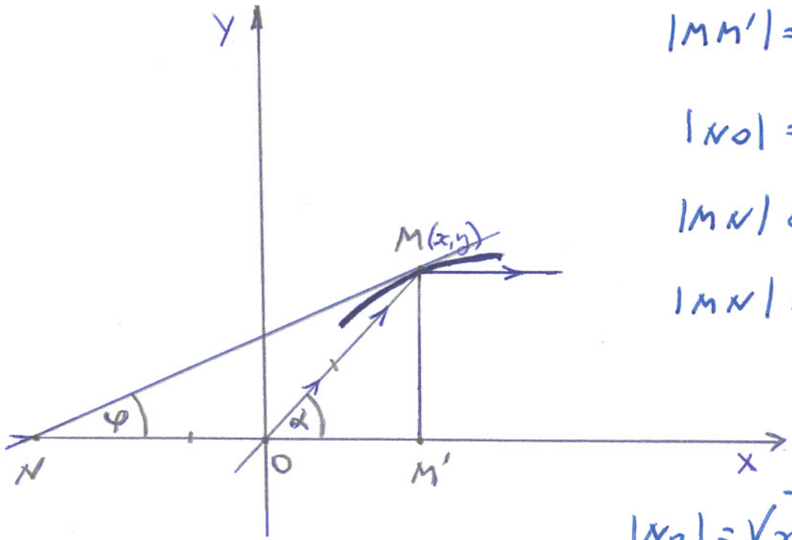
$$u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \ \text{ για } \ y \in [0, l],$$

$$u(x, 0) = \phi_1(x), \ \ u(x, l) = \phi_2(x) \ \text{ για } \ x \in [0, \pi],$$

με $\phi_i'(0) = \phi_i'(\pi) = 0$, $i = 1, 2$.



σχήμα 1



$|MM'| = y \quad |OM'| = x$

$|NO| = |OM|$

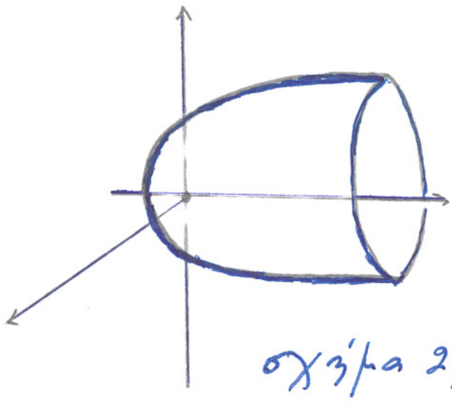
$|MN| \cos\varphi = |NM'|$

$|MN| \sin\varphi = |MM'|$

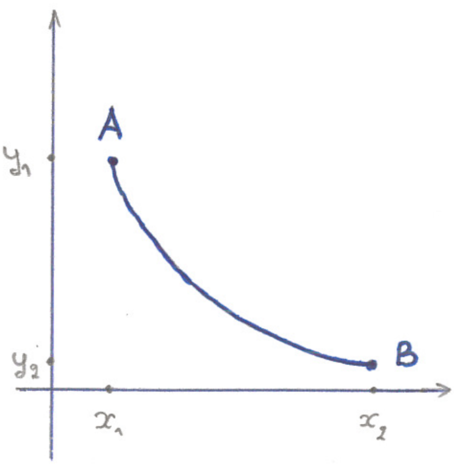
$$\tan\varphi = \frac{y}{x + |NO|}$$

$|NO| = \sqrt{x^2 + y^2} = |OM|$

σχήμα 2α.



σχήμα 2β.



σχήμα 3