

1^ο Εργαστήριο Διαφορικών Εξισώσεων

1. Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$dy/dt = y - 5, \quad y(0) = y_0$$

Που συγκλίνουν οι λύσεις καθώς $t \rightarrow \infty$. Να σχεδιάσετε τις λύσεις για διάφορα y_0 .

2. Ο γραμμικές εξισώσεις της μορφής

$$y' + p(t)y = g(t)$$

λύνονται με τη μέθοδο του ολοκληρώνοντα παράγοντα, δηλ. πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τη συνάρτηση $\mu(t)$. Συνεπώς η εξίσωση μας γράφεται στη μορφή

$$(y(t)\mu(t))' = g(t)\mu(t),$$

η οποία και ολοκληρώνεται. Πως βρισκουμε τη συνάρτηση $\mu(t)$?

3. Να επιλύσετε το πρόβλημα

$$t^2 y' + 2ty = \cos t, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$$

Απάντηση: $y(t) = \sin t/t^2$

4. Να επιλύσετε την εξίσωση

$$(1 + t^2)y' + 4ty = (1 + t^2)^{-2}$$

Απάντηση: $y(t) = [\tan^{-1} t + C]/(1 + t^2)^2$

5. Οι εξισώσεις Bernoulli

$$y' + p(t)y = q(t)y^n, \quad n > 1$$

μετατρέπονται σε γραμμικές με την αντικατάσταση $v = y^{1-n}$. Να δείξετε ότι η v ικανοποιεί την εξίσωση

$$v' + (1 - n)p(t)v = (1 - n)q(t).$$

6. Να επιλύσετε την εξίσωση

$$t^2 y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0.$$

Απάντηση: $y(t) = \pm[5t/(2 + 5ct^5)]^{1/2}$

7. Να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + 2y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad t > 0,$$

όπου

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

Υπόδειξη: Επιλύετε την εξίσωση χωριστά στα δύο διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, \infty)$. Επειδή αναζητούμε μια ενιαία συνεχή λύση στο $[0, \infty)$ απαιτούμε συνέχεια στο $t = 1$. Δηλ. $y(1-) = y(1+)$. Η λύση είναι

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-2t}, & t > 1. \end{cases}$$

8. Η εξίσωση Riccati είναι της μορφής

$$y' + p(t)y + q(t)y^2 = g(t).$$

Να δείξετε ότι αν γνωρίζουμε μια μερική λύση $y_1(t)$ της εξίσωσης τότε η $v = y - y_1$ είναι λύση της εξίσωσης Bernoulli:

$$v' + [p(t) + 2q(t)y_1(t)]v = -q(t)v^2.$$

9. Να επιλυθεί η εξίσωση Riccati

$$y' - y^2 = -2/t^2.$$

Υπόδειξη: Η $y_1(t) = 1/t$ είναι μερική λύση της εξίσωσης.