2^o Εργαστήριο Διαφορικών Εξισώσεων

1. α) Πότε μιά εξίσωση

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0$$

είναι ακριβής;
β) Τι είναι ο ολοκληρώνων παράγοντας μ; Να εξηγήσετε πως και υπό ποιές συνθήκες παράγονται οι σχέσεις

$$\mu'(x) = \frac{M_y - N_x}{N}\mu \text{ ή } \mu'(y) = \frac{N_x - M_y}{M}\mu$$

2. Είναι η εξίσωση

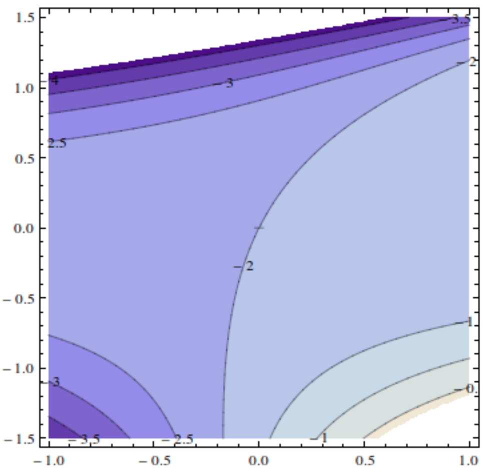
$$[4(x^3/y^2) + (3/y)]dx + [3(x/y^2) + 4y]dy = 0$$

ακριβής; Αν δεν είναι να βρεθεί ο ολοκληρώνων παράγοντας που την κάνει ακριβή. Να βρεθεί η συνάρτηση $\psi(x, y)$ που δίνει τη λύση της παραπάνω εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή μέσω της σχέσης $\psi(x, y(x)) =$ σταθερά.

3. Είναι η εξίσωση

$$ydx + (2x - ye^y)dy = 0$$

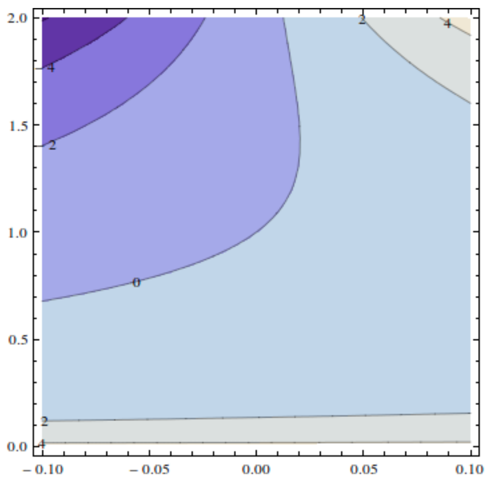
ακριβής; Αν δεν είναι να βρεθεί ο ολοκληρώνων παράγοντας που την κάνει ακριβή.
α) Να βρεθεί η συνάρτηση $\psi(x, y)$ που ορίζει τη λύση της παραπάνω εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή.
β) Γιατί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y(0) = 0$ για την παραπάνω εξίσωση έχει λύση;
γ) Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζονται οι ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $\psi(x, y)$. Τι μπορείτε να πείτε για το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης για $y(0) = 0$;



4. Είναι η εξίσωση

$$ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$$

ακριβής;
α) Να βρεθεί η συνάρτηση $\psi(x, y)$ που ορίζει τη λύση της παραπάνω εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή.
β) Γιατί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y(0) = 1$ για την παραπάνω εξίσωση έχει λύση;
γ) Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζονται οι ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $\psi(x, y)$. Τι μπορείτε να πείτε για το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης για $y(0) = 1$;



5. α) Να δείξετε ότι για να υπάρχει ολοκληρώνων παράγοντας της εξίσωσης

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))y'(x) = 0$$

της μορφής $\mu = \mu(z)$, $z = z(x, y)$ θα πρέπει η παράσταση

$$A = \frac{N_x - M_y}{z_y M - z_x N}$$

να είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής z, δηλ. $A = A(z)$. Επιπλέον ισχύει

$$\mu(z) = exp \int A(z)dz.$$

β) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας το α), ότι για την εξίσωση

$$(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0,$$

έχουμε $\mu = \mu(x + y^2) = (x + y^2)^{-3}$.
γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $\psi(x, y)$ μέσω της οποίας δίνεται η λύση της αρχικής εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή. Να γίνει ο πλήρης υπολογισμός.
Απάντηση:

$$\psi(x, y) = \frac{x - y^2}{(x + y^2)^2}$$