Θεώρημα Legendre

$$I(a) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*(t) + a\mu(t), \dot{x}^*(t) + a\mu'(t))\,dt$$

Κάνοντας ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης F γύρω από το σημείο $(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$ έχουμε

$$I(x^*(t) + a\mu(t)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,dt + \int_{t_0}^{t_1} [F_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,a\mu(t)$$

$$+ F_{\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,a\mu'(t)]\,dt +$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [F_{xx}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,\mu^2(t) + 2F_{x\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\,\mu(t)\,\mu'(t)$$

$$+ F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))(\mu'(t))^2]\,a^2\,dt + o(a^2)$$

Οπότε

$$I''(a) = \delta^2 J(x^*, \mu) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [F_{xx}\,\mu^2 + 2F_{x\dot{x}}\,\mu\,\mu' + F_{\dot{x}\dot{x}}(\mu')^2]\,dt$$

Ο μεσαίος όρος με παραγοντική ολοκλήρωση, γράφεται

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{x\dot{x}}\,\mu\,\mu'\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{x\dot{x}}\,\mu\,d\mu = F_{x\dot{x}}\,\mu^2\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \mu^2 \frac{d}{dt}(F_{x\dot{x}})\,dt$$

Οπότε έχουμε

$$\delta^2 J(x^*,\mu) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[\underbrace{\Big(F_{xx} - \mu^2\frac{d}{dt}(F_{x\dot{x}})\Big)}_{P} \mu^2 + \underbrace{F_{\dot{x}\dot{x}}}_{Q} (\mu')^2 \Big] dt$$

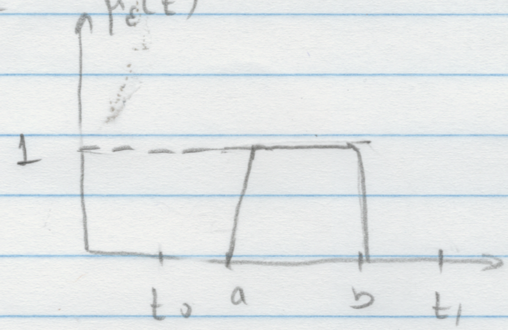
<u>Θεώρημα</u> (Αναγκαία Συνθήκη Legendre) Μιά αναγκαία συνθήκη, ώστε το συναρτησιακό

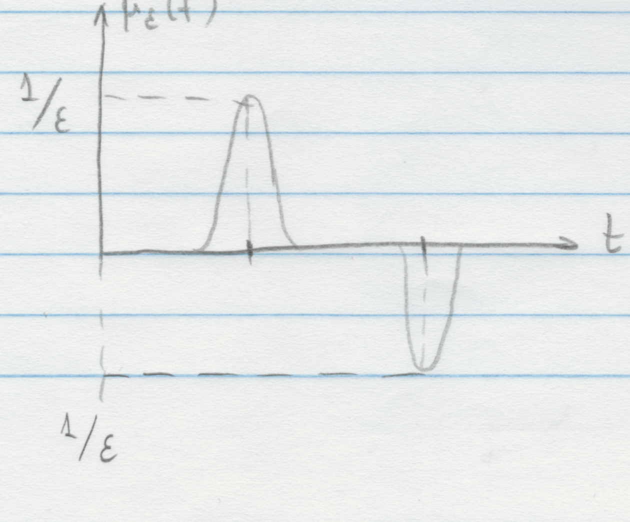
$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

να έχει μέγιστο στο $x^*(t)$ είναι

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \leq 0 \qquad \text{γιά όλα τα } t \in [t_0, t_1].$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω ότι $F_{\dot{x}\dot{x}}(t, \dot{x}(t), \dot{x}^*(t)) > 0$ σε ένα διάστημα $[a,b] \subset (t_0, t_1)$. Τότε μπορεί να επιλέξει κανείς μιά οικογένεια συναρτήσεων $\mu_\varepsilon(t)$ τέτοια ώστε





Για νά έχουμε μέγιστο, θα πρέπει

$$I''(0) = \delta^2 J(x^*, \mu) = \int_{t_0}^{t_1} P\mu^2 + Q(\mu')^2 \,] \, dt \leq 0$$

Από την υπόθεση το ολοκλήρωμα

$$\int_{t_0}^{t_1} P \mu_\varepsilon^2 \, dt$$

είναι φραγμένο. Όμως

$$\int_{t_0}^{t_1} Q(\mu_\varepsilon')^2 \, dt \approx \frac{\text{σταθερά}}{\varepsilon^2} \quad \varepsilon \to +\infty.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Μιά κατάλληλη συνάρτηση είναι

$$\mu_\varepsilon = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{\pi(t-\tilde{t})}{\varepsilon} & \text{αν} \quad t \in [\tilde{t}-\varepsilon, \tilde{t}+\varepsilon] \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

<u>Άσκηση</u>: Να δείξετε ότι $\delta^2 J(x^*, \mu^\varepsilon) \approx \dfrac{\text{σταθερά}}{\varepsilon}$

<u>Υπόδειξη</u>: $\delta^2 J(x^*, \mu^\varepsilon) = \displaystyle\int_{\tilde{t}-\varepsilon}^{\tilde{t}+\varepsilon} \left[P(t) \sin^4 \frac{\pi(t-\tilde{t})}{\varepsilon} + Q(t) \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{2\pi(t-\tilde{t})}{\varepsilon} \right] dt$

<u>Πρόταση</u> Αν $F = F(x, \dot{x})$, τότε η εξίσωση Euler συνεπάγεται

$$F - \dot{x} F_{\dot{x}} = \text{σταθερά}$$

<u>Απόδειξη</u>: $\dfrac{d}{dt}[F(x,\dot{x}) - \dot{x} F_{\dot{x}}(x,\dot{x})] = \dot{x}\left[F_x - \dfrac{d}{dt} F_{\dot{x}}\right].$

Συνεπώς

$$F - \dot{x} F_{\dot{x}} = \text{σταθ} \iff \left\{ \dot{x} = 0 \text{ ή } F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0 \right\}$$

Διάφορα είδη τελικών συνθηκών

Πρόβλημα: Να μελετηθεί το πρόβλημα

$$\max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \,, \quad x(t_0) = x_0$$

όπου ικανοποιούνται μία από τις παρακάτω τελικές συνθήκες

$x(t_1)$ ελεύθερο , t_1 δεδομένο.

$x(t_1) \geq x_1$, x_1, t_1 δεδομένα

$x(t_1) = g(t_1)$, t_1 ελεύθερο , g δεδομένη C^1 συνάρτηση.

Παρατήρηση: Η συνοριακή συνθήκη $x(t_0) = x_0$ καθορίζει τη μία από τις δύο σταθερές που εμφανίζονται στη γενική λύση της εξίσωσης Euler. Γιά να βρούμε την άλλη σταθερά ή αλλιώς να καθορίσουμε που καταλήγει η τροχιά $x(t_1)$, χρειαζόμαστε μιά επιπλέον συνθήκη που καλείται συνθήκη εγκαρσιότητας (καθετότητας)

Εχουμε τις εξής συνθήκες

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \leq 0 \,, \quad (= 0 \text{ αν } x^*(t_1) > x_1)$$

$$\left[F + (\dot{g} - \dot{x}) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right]_{t=t_1} = 0$$

Απόδειξη: Εχουμε

$$\delta J(x;y) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right] y(t)\, dt \qquad (1)$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} y(t_1) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_0} y(t_0)$$

(i) Η παραπάνω σχέση γίνεται μηδέν αν

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} y(t_1)=0 \rightsquigarrow \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1}=0$$

(ii) Έστω $x^*(t)$ η βέλτιστη λύση. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $x=x^*(t)+\varepsilon y(t)$, με $y(t_0)=0$ και

$$x^*(t_1)+\varepsilon y(t_1)\geqslant x_1.$$

Έστω $x^*(t_1)>x_1$. Θεωρούμε όλα τα y και ε τέτοια ώστε

$$|\varepsilon|\,|y(t_1)|<x^*(t_1)-x_1$$

$$\rightsquigarrow \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} y(t_1)=0 \rightsquigarrow \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1}=0$$

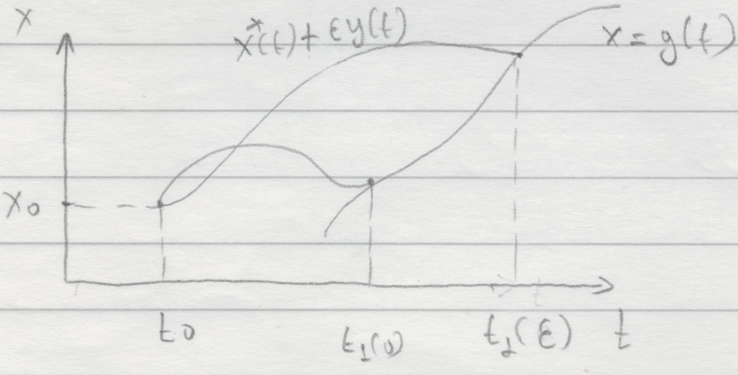
Έστω $x^*(t_1)=x_{t_1}$. Επειδή όλες οι συναρτήσεις $y\in Y$ είναι αποδεκτές $\Rightarrow$ εξισώσεις Euler ικανοποιούνται.
Θέλουμε να δούμε τι συνεπάγεται αν $y(t_1)>0$. Θα πρέπει $x^*(t_1)+\varepsilon y(t_1)>x_1 \rightsquigarrow \varepsilon y(t_1)>0$ οπότε $\varepsilon\geqslant 0$.
Έχουμε

$$I(0)\geqslant I(\varepsilon),\ \varepsilon\geqslant 0 \Rightarrow I'(0)\leq 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} y(t_1)\leq 0.$$

Οπότε

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1}\leqslant 0$$

(iii)



$$I(\varepsilon)=\int_{t_0}^{t_1(\varepsilon)} F\big(t, x^*(t)+\varepsilon y(t), \dot{x}^*(t)+\varepsilon \dot{y}(t)\big)\,dt$$

$$I'(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1(\varepsilon)} \left[\frac{\partial F}{\partial x} y(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{y}(t) \right] dt + [F]_{t=t_1(\varepsilon)} \cdot t_1'(\varepsilon)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη

$$I'(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1(\varepsilon)} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] y(t)\, dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} y(t) \Big|_{t_0}^{t_1(\varepsilon)} + F\Big|_{t=t_1(\varepsilon)} t_1'(\varepsilon)$$

Υποθέτοντας ότι η εξίσωση Euler ικανοποιείται έχουμε

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1(0)} y(t_1(0)) + F\Big|_{t=t_1(0)} \cdot t_1'(0) = 0$$

Επιπλέον $x^*(t_1(\varepsilon)) + \varepsilon\, y(t_1(\varepsilon)) = g(t_1(\varepsilon))$ οπότε παραγωγίζοντας ως προς ε και θέτοντας $\varepsilon = 0$, έχουμε

$$[\dot{g}(t_1(0)) - \dot{x}^*(t_1(0))]\, t_1'(0) = y(t_1(0)) \rightsquigarrow$$

$$\left([F]_{t=t_1} + (\dot{g}(t_1) - \dot{x}^*(t_1)) \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \right) t_1'(0) = 0 .$$

Για $y(t_1(0)) \neq 0 \rightsquigarrow t_1'(0) \neq 0$, οπότε έχουμε το ζητούμενο

Οπότε

$$L^* - L \geq \frac{\partial L^*}{\partial x}(x^* - x) + \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}}(\dot{x}^*$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η λύση του παρακάτω προβλήματος

$$\min \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2)\,dt, \quad x(0) = 1, \quad x(1) \text{ free}$$

Έχουμε $L(x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}^2$ οπότε η συνθήκη καθετότητας $L_{\dot{x}}\big|_{t=1} = 2\dot{x}(1) = 0$

Εξίσωση Euler

$$x(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$$

$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = A + B$, $\dot{x}(1) = 0 \Rightarrow Ae - Be^{-1} = 0$

Οπότε

$$A = (e^2+1)^{-1}, \quad B = e^2(e^2+1)^{-1}$$

$$\Rightarrow x = Ae^{t} + Be^{-t} = \frac{1}{e^2+1} e^{t} + \frac{e^2}{e^2+1} e^{-t}$$

Παράδειγμα: Να επιλυθεί

$$\min \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2)\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) \geq 1$$

Η δεύτερη συνοριακή συνθήκη επιβάλλει

$2\dot{x}(1) \geq 0$ ($= 0$ αν $x(1) > 1$)

Επειδή $x(0) = 0 \rightsquigarrow A + B = 0 \rightsquigarrow$

$$x(t) = A(e^{t} - e^{-t})$$

Επειδή $x(1) \geq 1 \rightarrow A(e - e^{-1}) \geq 1$

Οπότε $A > 0$. Θέλουμε

$$\dot{x}(1) = A(e + e^{-1}) \geq 0 \quad (= 0 \text{ αν } x(1) > 1)$$

Επειδή $\dot{x}(1)$ δεν μπορεί να γίνει $0 \Rightarrow$

$x(1) = 1 \rightsquigarrow A(e - e^{-1}) = 1 \rightsquigarrow$

$$x(t) = \frac{e}{e^2-1} e^{t} - \frac{e}{e^2-1} e^{-t}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η λύση, εφόσον υπάρχει

$$\min \int_0^{t_1} (x^2 + \dot{x}^2)\, dt \quad , \quad x(0) = 0, \quad x(t_1) = g(t_1) = t_1 + 1$$

$$\begin{cases} x(t) = A(e^{t} - e^{-t}) , & x(t_1) = t_1 + 1 \\ L + (\dot{g} - \dot{x}) L_{\dot{x}} \Big|_{t = t_1} = 0 \end{cases}$$

$x(t_1) = t_1 + 1 \Rightarrow \quad A(e^{t_1} - e^{-t_1}) = t_1 + 1 \quad (1)$

$L_{\dot{x}} = 2\dot{x}, \quad \dot{g}(t) = 1 \leadsto$

$$A^2(e^{t_1} - e^{-t_1})^2 + A^2(e^{t_1} + e^{-t_1}) + (1 - A(e^{t_1} + e^{-t_1})) \cdot$$
$$\cdot\, 2A(e^{t_1} - e^{-t_1}) = 0$$

$\rightarrow \quad A = \frac{1}{2}(e^{t_1} + e^{-t_1})$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω εξίσωση (1) την τιμή του A, οπότε παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{1}{2}(e^{t_1} + e^{-t_1})(e^{t_1} - e^{-t_1}) = t_1 + 1$$

ή

$$e^{2t_1} - e^{-2t_1} = 2t_1 - 2$$

που έχει μία πραγματική ρίζα μεταξύ (0, 1).