Ικανές συνθήκες

Θεώρημα Έστω ότι η $F(t, x, \dot{x})$ είναι κοίλη σαν συνάρτηση των $(x, \dot{x})$ γιά κάθε $t \in [t_0, t_1]$. Αν η συνάρτηση $x^* = x^*(t)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (i) $x^*(t_1) = x_1$ (t_1, x_1 δεδομένα) ή (ii) $x^*(t_1) \geq x_1$, (t_1, x_1 δεδομένα) ή (iii) $x^*(t_1)$ ελεύθερο και επιπλέον επιλύει την εξίσωση Euler και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} \leq 0 \quad (=0 \text{ αν } x^*(t_1) > x_1) \text{ ή } \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_1} = 0 \text{ αν}$$

ισχύουν (ii) ή (iii) αντίστοιχα, τότε η $x^*(t)$ είναι ολικό μέγιστο του προβλήματος βελτιστοποίησης. Δηλ

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*, \dot{x}^*)\,dt \geq \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\,dt, \quad x(t_0) = x_0$$

υπό τις συνθήκες

(i) $x(t_1) = x_1$, (ii) $x(t_1) \geq x_1$, (iii) $x(t_1)$ ελεύθερο.

Απόδειξη: Επειδή η F είναι κοίλη, έχουμε την παρακάτω σχέση,

$$F(t, x, \dot{x}) - F(t, x^*, \dot{x}^*) \leq \frac{\partial F(t, x^*, \dot{x}^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial F(t, x^*, \dot{x}^*)}{\partial \dot{x}}(\dot{x} - \dot{x}^*).$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Euler

$$F^* - F \geq \frac{\partial F^*}{\partial x}(x^* - x) + \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(\dot{x}^* - \dot{x}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)(x^* - x) + \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}(\dot{x}^* - \dot{x})$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} (x^* - x) \right]$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_{t_0}^{t_1} (F^* - F)\, dt \geq \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} (x^*(t_1) - x(t_1)) = A$$

Αν η τερματική συνθήκη είναι $x(t_1) = x_1$, τότε $A = 0$ επειδή $\left(\partial F^* / \partial \dot{x}\right)_{t=t_1} = 0$. Αν $x(t_1) \geq x_1$ και $x^*(t_1) > x_1$ τότε πάλι $\left(\partial F^* / \partial \dot{x}\right)_{t=t_1} = 0$. Αν $x(t_1) \geq x_1$ και $x^*(t_1) = x_1$, τότε

$$\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} \leq 0 \quad \text{και} \quad x^*(t_1) - x(t_1) = x_1 - x(t_1) \leq 0,$$

οπότε $A \geq 0$. Αν $x(t_1)$ ελεύθερο, τότε πάλι $\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} = 0$.

<u>Παρατήρηση</u>: Ξέρουμε ότι μιά αναγκαία συνθήκη γιά να έχουμε μέγιστο στο $x^*(t)$ είναι

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \leq 0 \quad \text{γιά όλα τα } t \in [t_0, t_1].$$

Θα περίμενε κανείς η συνθήκη

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) < 0$$

να είναι και ικανή. <u>Δεν</u> αρκεί όμως η παραπάνω συνθήκη. Χρειαζόμαστε κάτι επιπλέον.

<u>Δεύτερης τάξης ικανή συνθήκη γιά νά έχουμε ακρότατο</u>: Ενα ακρότατο είναι μέγιστο αν ισχύει

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) < 0 \quad \text{για όλα τα } t \in [t_0, t_1]$$

και επιπλέον στο διάστημα $[t_0, t_1]$ δεν περιέχεται κανένα συζυγές σημείο του t_0.