Διάφορα θέματα λογισμού μεταβολών

Πολλές φορές στο συνολικό κόστος συμπεριλαμβάνουμε και κάποιο τερματικό κόστος $S(x(t_1))$. Μπορεί νά αντιπροσωπεύει π.χ. κάποια ποινή εξόδου ή την αξία scrap κ.λ.π. Έτσι έχουμε νά λύσουμε το εξής πρόβλημα

$$\max \left\{ \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\,dt + S(x(t_1)) \right\}, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

όπου S είναι μιά δεδομένη συνάρτηση. Έχουμε

$$S(x(t_1)) - S(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} S(x(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} S'(x)\,\dot{x}(t)\,dt$$

Επομένως έχουμε λύση $x^*(t)$ του προβλήματος (1) αν η $x^*(t)$ επιλύει το πρόβλημα

$$\max \int_{t_0}^{t_1} \left[F(t, x, \dot{x}) + S'(x)\cdot\dot{x}(t) \right] dt,$$

με $x(t_0) = x_0$ και $x(t_1)$ ελεύθερο. Αν θέσουμε

$$F_1(t, x, \dot{x}) = F(t, x, \dot{x}) + S'(x)\,\dot{x},$$

τότε έχουμε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στη κλασσική του μορφή, οπότε θα έχουμε

$$\left(\partial F / \partial \dot{x} \right)_{t=t_1} + S'(x(t_1)) = 0, \quad \text{για } x(t) = x^*(t).$$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν η F είναι κοίλη ως προς $(x, \dot{x})$ και η S είναι επίσης κοίλη, τότε η λύση της εξίσωσης Euler είναι ολικό μέγιστο.

Πράγματι,

$$\int_{t_0}^{t_1} F^* dt + S(x^*(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} F\,dt - S(x(t_1))$$

$$\geq \left[\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1} + S'(x^*(t_1)) \right] \cdot (x^*(t_1) - x(t_1)) = 0$$

<u>Παράδειγμα:</u> Νά επιλυθεί τό πρόβλημα

$$\min \left\{ \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2)\,dt + (x(1))^2 \right\}, \quad x(0) = 1$$

Θα πρέπει νά ισχύει

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=1} + S'(x(1)) = 0$$

οπου $F(t, x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}^2$ και $S(u) = u^2$. Οπότε $F'_{\dot{x}} = 2\dot{x}$ και $S'(u) = 2u$ και η συνθήκη εγκαρσιότητος συνεπάγεται

$$2\dot{x}(1) + 2x(1) = 0,$$

δηλ.

$$2A(e + e^{-1}) - 2e^{-1} + 2A(e - e^{-1}) + 2e^{-1} = 0,$$

οπότε $A = 0$ καί $x(t) = e^{-t}$ η οποία είναι καί λύση του προβλήματος λόγω κυρτότητας.

Στην περίπτωση που έχουμε ένα πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$, δηλ. $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ με $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ και επιβάλλουμε τις παρακάτω τερματικές συνθήκες

$$\begin{aligned} & x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = 1, \dots, l, \\ & x_i(t_1) \geq x_i^1, \quad i = l+1, \dots, m, \qquad (2) \\ & x_i(t_1) \text{ ελεύθερο}, \quad i = m+1, \dots, n \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις Euler που ικανοποιούνται είναι οι

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Οι αντίστοιχες συνθήκες εγκυρότητας γράφονται στη μορφή

$$x_i^*(t_1) = x_i^1 \quad , \qquad i = 1, \ldots, l$$
$$\left(\partial F / \partial \dot{x}_i\right)_{t=t_1} \leq 0 \quad (=0 \text{ αν } x_i^*(t_1) > x_i^1) \qquad i = l+1, \ldots, m \quad (3)$$
$$\left(\partial F / \partial \dot{x}_i\right)_{t=t_1} = 0 \qquad i = m+1, \ldots, n.$$

Η αναγκαία συνθήκη Legendre, παίρνει τη μορφή

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} F''_{\dot{x}_i \dot{x}_j}(t, x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t), \dot{x}_1^*(t), \ldots, \dot{x}_n^*(t)) h_i h_j \leq 0,$$

γιά όλα τα $t \in [t_0, t_1]$ και τα h_i, h_j, $i, j = 1, \ldots, n$.

<u>Παράδειγμα:</u> Να λυθεί το πρόβλημα

$$\min \int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2 x_1 x_2)\, dt, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

όπου (i) $x_1(\pi/2) = 1$, (ii) $x_2(\pi/2)$ ελεύθερο.

Εχουμε $F = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2$, επομένως οι εξισώσεις Euler είναι

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2x_2 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}_1) = 2x_2 - 2\ddot{x}_1 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right) = 2x_1 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}_2) = 2x_1 - 2\ddot{x}_2 = 0$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση δύο φορές, παίρνουμε

$$x_1 = Ae^{t} + Be^{-t} + C\sin t + D\cos t,$$

όμοια $x_2 = \ddot{x}_1$, οπότε

$$x_2 = Ae^{t} + Be^{-t} - C\sin t - D\cos t$$

|| Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $r^4 - 1 = 0$

Έχουμε

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \text{ και } x_1(\pi/2) = 1,$$

οπότε

$$A + B + D = 0, \quad A + B - D = 0, \quad Ae^{\pi/2} + Be^{-\pi/2} + C = 1.$$

Η συνθήκη εγκυρότητας μας δίνει

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)_{t=\pi/2} = 2\dot{x}_2(\pi/2) = 2\left[Ae^{-\pi/2} - Be^{-\pi/2} + D\right] = 0.$$

Συνεπώς

$$A = B = D = 0, \quad C = 1$$

και $x_1(t) = \sin t$, $x_2 = -\sin t$.

Επειδή

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} h_i h_j = 2h_1^2 + 2h_2^2 \leq 0.$$

Επομένως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι πιθανόν να έχει λύση, ενώ το πρόβλημα μεγιστοποίησης δεν έχει λύση. □

Παρακάτω θα εξετάσουμε το πρόβλημα του ελεύθερου τερματικού χρόνου. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

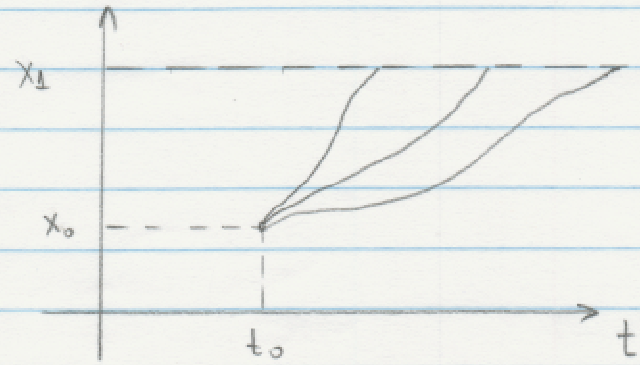
<u>Θεώρημα</u> Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt, \quad x(t_0) = x^0$$

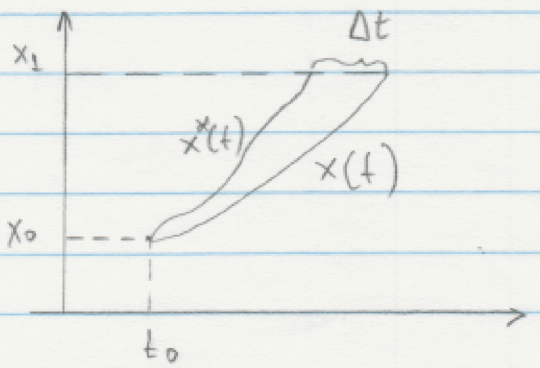
μέ τις τερματικές συνθήκες (2) μέ $t_1 \in [T_1, T_2]$ $t_0 \leq T_1 < T_2$.
Αν $(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t))$ είναι μιά λύση του προβλήματος στο διάστημα $[t_0, t_1^*]$, τότε ικανοποιούνται οι εξισώσεις Euler, οι συνθήκες εγκαρσιότητας (3) και επιπλέον οι συνθήκες

$$\left[F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right]_{t=t_1^*} \begin{cases} \leq 0 & \text{αν } t_1^* = T_1 \\ = 0 & \text{αν } t_1^* \in (T_1, T_2) \\ \geq 0 & \text{αν } t_1^* = T_2 \end{cases} \qquad (4)$$

<u>Απόδειξη</u> (Γιά μία διάσταση, $x(t_1) = x_1$ και t_1 ελεύθερο)



<u>Παρατήρηση</u>:



Η δυσκολία έγκειται στο ότι η $x^*(t)$ δεν ορίζεται γιά $t > t_1$. Για να απλοποιήσουμε την απόδειξη, θεωρούμε ότι η $x^*(t)$ επεκτείνεται γιά $t > t_1$ και θεωρούμε διαταραχές $x(t) = x^*(t) + \varepsilon \mu(t)$

Υποθέτουμε ότι $t_1^* \in (T_1, T_2)$, οπότε

$$J(x^* + \varepsilon\mu) = \int_{t_0}^{t_1(\varepsilon)} F(t, x^*(t) + \varepsilon\mu(t), \dot{x}^*(t) + \varepsilon\dot{\mu}(t))\,dt$$

Αν παραγωγίσουμε ως προς ε, τότε θα υπάρξει ο επιπλέον όρος

$$F(t_1(\varepsilon), x^*(t_1(\varepsilon))+\varepsilon\,\mu(t_1(\varepsilon)), \dot{x}(t_1(\varepsilon))+\varepsilon\dot{\mu}(t_1(\varepsilon)))\, t_1'(\varepsilon).$$

Επομένως

$$I'(0) = \int_{t_0}^{t_1^*} \left[F_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \right] dt$$

$$+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_1^*, x^*(t_1^*), \dot{x}^*(t_1^*))\, \mu(t_1^*) + F(t_1^*, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1))\, t_1'(0) \qquad (5)$$

Όμως $x_1 = x^*(t_1(\varepsilon)) + \varepsilon\,\mu(t_1(\varepsilon))$,
οπότε παραγωγίζοντας ως προς ε, έχουμε

$$\dot{x}^*(t_1^*)\, t_1'(0) + \mu(t_1^*) = 0.$$

Οπότε από την (5), έχουμε

$$\left[-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_1^*, x^*(t_1^*), \dot{x}^*(t_1^*))\, \dot{x}^*(t_1) + F(t_1^*, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)) \right] t_1'(0) = 0$$

γιά όλα τά $t_1'(0)$.

<u>Συνθήκες γωνιότητας</u>

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min \int_{-1}^{+1} x^2 (1-\dot{x})^2 dt \; , \; x(0)=0, \; x(2)=1. \quad (P_1)$$

Αν αναζητήσουμε μιά ομαλή λύση $x(t)$, τότε θα πρέπει

$$x^2(t)\,(1-\dot{x}(t))^2 = 0$$

με $x(t)$ μιά ομαλή συνάρτηση. Οι μόνες λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$x(t)=0 \quad \text{ή} \quad \dot{x}(t)=1,$$

οπότε $x(t)=0$ ή $x(t)=t$. Όμως καμμία από τις παραπάνω δεν ικανοποιεί και τις δύο συνοριακές συνθήκες.

Η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 \le t < 1 \\ t & \text{για } 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

που δεν είναι C^2. Η συνάρτηση x^* είναι συνεχής αλλά η παράγωγος $\dot{x}^*$ είναι ασυνεχής στο $t=1$ και το γράφημα παρουσιάζει γωνία.

<u>Υπόθεση</u> Θεωρούμε ως αποδεκτές συναρτήσεις, συνεχείς που είναι κατά τμήματα ομαλές συναρτήσεις δηλ. είναι ομαλές συναρτήσεις εκτός ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων που η πρώτη παράγωγος είναι ασυνεχής.

Ας υποθέσουμε ότι η ακρότατη συνάρτηση έχει ένα σημείο t_d ασυνέχειας με $t_d \in (t_0, t_1)$, $\dot{x}(t_d-) \neq \dot{x}(t_d+)$. Και μελετάμε το πρόβλημα δεδομένων άκρων δηλ $\mu(t_0) = \mu(t_1) = 0$,

$$I(\varepsilon) = J[x^* + \varepsilon\mu] = \int_{t_0}^{t_d} F(t, x^* + \varepsilon\mu, \dot{x} + \varepsilon\dot{\mu})\,dt + \int_{t_d}^{t_1} F(t, x^* + \varepsilon\mu, \dot{x}^* + \varepsilon\dot{\mu})\,dt.$$

Οπότε

$$I'(0) = \int_{t_0}^{t_d} (F_x \mu + F_{\dot{x}} \dot{\mu})\,dt + \int_{t_d}^{t_1} (F_x \mu + F_{\dot{x}} \dot{\mu})\,dt \quad (6)$$

Επιλέγοντας κατάλληλα μ είναι εύκολο νά δείξουμε ότι

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0 \quad \text{στο } (t_0, t_d) \cup (t_d, t_1),$$

οπότε λόγω συνέχειας, οι εξισώσεις Euler πρέπει να ικανοποιούνται δεξιά και αριστερά από τό t_d. Αν θεωρήσουμε τώρα μιά ομαλή μ μέ $\mu(t_d) \neq 0$, έχουμε από την (6):

$$I'(0) = \int_{t_0}^{t_d} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}\right)\mu + F_{\dot{x}}\mu \Big|_{t_0}^{t_d-} + \int_{t_d}^{t_1} \left(F_x\mu - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}\right)\mu + F_{\dot{x}}\mu \Big|_{t_d+}^{t_1}$$

$$= \left[F_{\dot{x}}(t_d, x^*(t_d), \dot{x}^*(t_d-)) - F_{\dot{x}}(t_d, x^*(t_d), \dot{x}^*(t_d+))\right] \mu(t_d) = 0$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η <u>πρώτη</u> συνθήκη γωνιότητας Weirstrass - Erdmann:

$$F_{\dot{x}}(t_d, x^*(t_d), \dot{x}^*(t_d-)) = F_{\dot{x}}(t_d, x^*(t_d), \dot{x}^*(t_d+)). \quad (7a)$$

Επιπλέον ισχύει η <u>δεύτερη</u> συνθήκη:

$$H(t_d, x^*(t_d), \dot{x}^*(t_d-)) = H(t_d, x^*(t_d), x^*(t_d+)) \quad (7b)$$

όπου

$$H(t,x,\dot{x}) = \dot{x}F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) - F(t,x,\dot{x})$$

Για την απόδειξη των παραπάνω σχέσεων θεωρούμε ασθενείς διαταραχές της μορφής:

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} x^*(t) & \text{για } t_0 \le t \le t_d \\ x^*(t_d) + \dot{x}^*(t_d-)(t-t_d) & \text{γιά } t_d < t \le t_d+\varepsilon \\ x^*(t) + \dfrac{\{x^*(t_d) + \dot{x}^*(t_d-)\varepsilon - x^*(t_d+\varepsilon)\}(t_d-t)}{t_1 - t_d - \varepsilon} & \text{για } t_d+\varepsilon < t \le t_1 \end{cases}$$

και

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = \begin{cases} x^*(t) + \dfrac{\{x^*(t_d) - \dot{x}^*(t_d+)\varepsilon - x^*(t_d-\varepsilon)\}(t-t_0)}{t_d - t_0 - \varepsilon} & \text{αν } t_0 \le t \le t_d-\varepsilon \\ x^*(t_d) - x^*(t_d+\varepsilon)\cdot(t_d - t) & \text{αν } t_d-\varepsilon < t \le t_d \\ x^*(t) & \text{αν } t_d < t \le t_1 \end{cases}$$

<u>Υπόδειξη</u>: Ισχύει

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(x_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = H(t_d, x^*(t_d), \dot{x}^*(t_d+)) - H(t_d, x^*(t_d), \dot{x}^*(t_d-)) \geq 0$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(\tilde{x}_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = H(t_d, x^*(t_d), \dot{x}^*(t_d-)) - H(t_d, x^*(t_d), \dot{x}^*(t_d+)) \geq 0$$

<u>Παράδειγμα</u> Επανερχόμενοι στο πρόβλημα (P_1), επιλύοντας την εξίσωση Euler, η αναμενόμενη ακρότατη ομαλή συνάρτηση είναι $x^*(t) = \frac{1}{2}t$ με $J(x^*(t)) = 0.125$