ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2007-08
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Άσκηση # 7, & 2.2 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 2.** Άσκηση # 7, & 2.4 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 3.** Έστω I πρώτο ιδεώδες δακτυλίου R και έστω S υποδακτύλιος τού R. Δείξτε ότι το $I \cap S$ είναι πρώτο ιδεώδες τού S.

****Πρόβλημα 4.** Άσκηση # 9, & 2.4 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

****Πρόβλημα 5.** Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι ιδεώδη και εκφράστε τα στην μορφή $< a_1, \ldots, a_k >$.
α) $A = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x], \ \ f(i) = 0\}$.
β) $B = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x], \ \ f(\sqrt{2}) = 0\}$.
γ) $C = \{f(x) \in \mathbb{R}[x], \ \ f(\sqrt{2}) = 0\}$.

****Πρόβλημα 6.** Έστω K σώμα. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $K[x]$ έχει άπειρα ανάγωγα πολυώνυμα.

****Πρόβλημα 7.** Έστω $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, \quad a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ και $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi, \ \ a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$.
α) Δείξτε ότι το $\mathbb{Z}[i]$ είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{C}$ και ότι το $\mathbb{Q}[i]$ είναι υπόσωμα τού $\mathbb{C}$.
β) Δείξτε ότι σώμα κλασμάτων τής α.π. $\mathbb{Z}[i]$ είναι ισόμορφο με το σώμα $\mathbb{Q}[i]$.

****Πρόβλημα 8.** Έστω R δακτύλιος.
α) Δείξτε ότι το σύνολο $N(R) = \{a \in R, \ \ a^n = 0$ γαι κάποιον φυσικό αριθμό $n\}$ είναι ιδεώδες τού R.
β) Έστω $\mathbb{Z}_m$ ο δακτύλιος των ακεραίων $\bmod m$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(Α) $N(\mathbb{Z}_m) = 0$.
(Β) Ο m δεν διαιρείται από το τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού.
Υπόδειξη: Κάνετε χρήση της ανάλυσης τού m σε πρώτους αριθμούς.