**ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2007-08**
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ #10**

*Υπενθύμιση*: Θα γίνει έκτακτο μάθημα τήν Τετάρτη 16/1/08 στις 12:00 (Λ210) σχετικά με το αδύνατο γεωμετρικών κατασκευών. Στην συνέχεια θα γίνει το μάθημα των ασκήσεων.

***Πρόβλημα 1.** Άσκηση # 1, & 6.7 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 2.** Άσκηση # 3, & 6.7 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 3.** Δείξτε ότι η ομάδα Galois τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\omega, 2^{1/3})$, όπου $\omega$ μια πρωταρχική τρίτη ρίζα τής μονάδος, είναι επιλύσιμη.

***Πρόβλημα 4.** Έστω $k$ σώμα με $\mathrm{char}k \neq 2$ και έστω $n$ περιττός φυσικός. Δείξτε ότι αν το $K$ περιέχει μια πρωταρχική $n$-ρίζα τής μονάδος τότε περιέχει και μια πρωταρχική $2n$-ρίζα τής μονάδος. Δείξτε ότι το παραπάνω δεν ισχύει στην περίπτωση που είτε $\mathrm{char}k = 2$ είτε το $n$ είναι άρτιος.

****Πρόβλημα 5.** Έστω $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Έστω $E$ το σώμα ανάλυσης τής $f$. Δείξτε ότι η επέκταση $\mathbb{Q} \leq E$ είναι κυκλική.

****Πρόβλημα 6.** Έστω $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i\sqrt{3}, 5^{1/3})$. Δείξτε ότι η ομάδα Galois τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq E$ είναι επιλύσιμη.

****Πρόβλημα 7.** α) Βρείτε για ποιούς φυσικούς $n$ ισχύει ότι $\phi(n) \mid 4$.
β) Χρησιμοποιήστε το α) για να προσδιορίσετε ποιές ρίζες τής μονάδος περιέχονται στα παρακάτω σώματα

$$K_1 = \mathbb{Q}(i), \quad K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}i), \quad K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{3}i), \quad K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}i)$$