ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2007-08
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

Σημείωση: Στα παρακάτω οι δακτύλιοι είναι αντιμεταθετικοί με μοναδιαίο στοιχείο, εκτός αν άλλως αναφέρεται.

***Πρόβλημα 1.** Άσκηση # 3, & 3.1 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 2.** Άσκηση # 4, & 3.1 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 3.** Άσκηση # 9, & 3.1 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 4.** Άσκηση # 10, & 3.1 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 5.** Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων με $[E : K] = p$ πρώτος αριθμός. Δείξτε τότε ότι $E = K[a]$ για κάποιο $a \in E$.

****Πρόβλημα 6.** Βρείτε τον βαθμό $[\mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] : \mathbb{Q}]$.

****Πρόβλημα 7.** **α)** Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$. Παρατηρείστε ότι $K[a] = \mathrm{Im}\phi_a$, όπου $\phi_a : K[x] \longrightarrow E$ με $\phi_a(f) = f(a)$.
β) Έστω $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$ οι τέσσερεις ρίζες τής εξίσωσης $x^4 - 2 = 0$. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}[a_i] \cong \mathbb{Q}[a_j]$, για κάθε $1 \leq i, j, \leq 4$.
γ) Ισχύει το ίδιο για τα $\mathbb{R}[a_i]$;

****Πρόβλημα 8.** **α)** Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^3 + 2x + 2$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$.
β) Ως πολυώνυμο περιτού βαθμού έχει μια πραγματική ρίζα, έστω a. Εκφράστε το $\frac{1}{1-a}$ ως στοιχείο τού $\mathbb{Q}[a]$.

****Πρόβλημα 9.** Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$. Εστω $f(x) \in K[x]$ ένα μή σταθερό πολυώνυμο. Θέτουμε $b = f(a)$. Έχουμε ότι $K \leq K(b) \leq E$. Δείξτε ότι το a είναι αλγεβρικό πάνω από το σώμα $K(b)$.

****Πρόβλημα 10.** Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$ αλγεβρικό στοιχείο πάνω από το K. Υποθέτουμε ότι το $\mathrm{Irr}(a, K)$ είναι περιττού βαθμού. Δείξτε ότι $K(a) = K(a^2)$. Ισχύει το ίδιο όταν ο βαθμός είναι άρτιος;