ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2007-08
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3

***Πρόβλημα 1.** Άσκηση # 2, & 3.2 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 2.** Άσκηση # 6, & 3.2 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 3.** Άσκηση # 2, & 3.3 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 4.** Άσκηση # 3, & 3.3 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 5.** Έστω $K \leq E$ μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων. Δείξτε ότι κάθε υποδακτύλιος τού E που περιέχει το K είναι σώμα. Ισχύει το ίδιο αν η επέκταση δεν είναι αλγεβρική;

***Πρόβλημα 6.** Άσκηση # 9, & 3.3 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

****Πρόβλημα 7.** Έστω a, b στοιχεία κάποιου σώματος K και έστω ότι το a είναι το τετράγωνο κάποιου στοιχείου στο σώμα $K(\sqrt{b})$. Δείξτε τότε ότι είτε το a είτε το ab είναι το τετράγωνο κάποιου στοιχείου στο K.

****Πρόβλημα 8.** Έστω ότι ο p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός. Θέτουμε $a = \mathrm{Re}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$ και $b = \mathrm{Im}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$ (πραγματικό και μιγαδικό μέρος τού αριθμού $e^{\frac{2\pi i}{p}}$). Δείξτε ότι $[\mathbb{Q}(a,b) : \mathbb{Q}] = \frac{p-1}{2}$.

****Πρόβλημα 9.** Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης για το πολυώνυμο $x^{p^8} - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$, $p =$ πρώτος αριθμός.

****Πρόβλημα 10.** Έστω K ένα σώμα, $a \in K$ και p πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^p - a$ ή είναι ανάγωγο στο $K[x]$ ή έχει ρίζα στο K.