# ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2007-08
# ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

*__Πρόβλημα 1.__ Άσκηση # 3, & 3.5 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

*__Πρόβλημα 2.__ Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = 2$. Δείξτε ότι η επέκταση είναι κανονική.

*__Πρόβλημα 3.__ Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ πολυώνυμο περιττού βαθμού $\geq 3$ το οποίο έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα $a \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι η επέκταση $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(a)$ δεν είναι κανονική.

**__Πρόβλημα 4.__ **α)** Έστω $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x]$ βαθμού $n$. Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = m$. Αν $(n, m) = 1$ δείξτε ότι το $f(x)$ παραμένει ανάγωγο και ως πολυώνυμο τού $F[x]$.
**β)** Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - 9x^3 + 15x + 6$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})[x]$.

**__Πρόβλημα 5.__ Έστω $K \leq F$ μια κανονική επέκταση σωμάτων και $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x]$. Αν το $f(x)$ δεν είναι ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $F[x]$ δείξτε ότι όλοι οι παράγοντες τής ανάλυσής του σε ανάγωγα είναι πολυώνυμα τού ιδίου βαθμού.

**__Πρόβλημα 6.__ Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $a^4 = 5$. Δείξτε ότι:
**α)** Το $\mathbb{Q}(ia^2)$ είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}$.
**β)** Το $\mathbb{Q}(a + ia)$ είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}(ia^2)$.
**γ)** Το $\mathbb{Q}(a + ia)$ δεν είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}$.

***__Πρόβλημα 7.__ Έστω $K \leq F$ μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων και $f(x) \in F[x]$. Δείξτε ότι υπάρχει μή μηδενικό πολυώνυμο $g(x) \in F[x]$ τέτοιο ώστε $f(x)g(x) \in K[x]$. Μπορείτε να βρείτε κάποιο φράγμα για τον βαθμό τού $fg$ σε σχέση με τον βαθμο τής επέκτασης $K \leq F$ και τον βαθμό τού $f$;

***__Πρόβλημα 8.__ Εστω ότι η το πολυώνυμο $x^p - 1$ ($p$ πρώτος) αναλύεται στο $K[x]$. Έστω $K \leq L$ επέκταση και $a \in L$ αλγβερικό πάνω από το $K$ για το οποίο ισχύει ότι ο βαθμός τού $\mathrm{Irr}(a, K)$ είναι πρώτος προς τον $p$. Δείξτε ότι $K(a) = K(a^p)$. Ισχύει το ίδιο αν το $x^p - 1$ δεν αναλύεται $K[x]$;