ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2007-08
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

***Πρόβλημα 1.** Έστω K πεπερασμένο σώμα με $\mathrm{char}K = p$, p =πρώτος. Δείξτε ότι κάθε στοιχείο $a \in K$ έχει μοναδική $p-$ρίζα στο K, δηλ. υπάρχει μοναδικό $b \in K$ με $a^p = b$.

***Πρόβλημα 2.** Έστω K σώμα με $\mathrm{char}K = p$, p =πρώτος και $a \in K$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^{p^n} - a \in k[x]$ (n θετικός ακέραιος) είναι ανάγωγο εάν και μόνον εάν το a δεν έχει $p-$ρίζα στο K.

***Πρόβλημα 3.** Έστω F_{2^n} το πεπερασμένο σώμα με 2^n στοιχεία. Δείξτε ότι κάθε στοιχείο τού F_{2^n} είναι το τετράγωνο κάποιου στοιχείου του.

***Πρόβλημα 4.** Δείξτε ότι $F_{2^2} = \mathbb{Z}_2(a)$, όπου το $a \in F_{2^2}$ είναι βαθμού 2 πάνω από το $\mathbb{Z}_2$

****Πρόβλημα 5.** **α)** Έστω p πρώτος και F_{p^n} το πεπερασμένο σώμα με p^n στοιχεία. Δείξτε ότι $F_{p^m} \leq F_{p^n}$ εάν και μόνον εάν $m \mid n$.
β) Δείξτε ότι η αλγεβρική θήκη $\bar{\mathbb{Z}_p}$ τού σώματος $\mathbb{Z}_p$ ισούται πρός $\bar{\mathbb{Z}_p} = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_{p^n}$.

****Πρόβλημα 6.** Έστω F_{p^n} όπως στο πρόβλημα 5. Δείξτε ότι η επέκταση $\mathbb{Z}_p \leq F_{p^n}$ είναι κανονική. Επομένως αν $a \in F_{p^n}$ το $\mathrm{Irr}(a, \mathbb{Z}_p)$ αναλύεται πάνω από το F_{p^n}. Βρείτε την ανάλυση τού $\mathrm{Irr}(a, \mathbb{Z}_p)$ ως έκφραση δυνάμεων τού a.

****Πρόβλημα 7.** Έστω K σώμα με $\mathrm{char}K = p$, p =πρώτος, $K \leq E$ μια επέκταση σωμάτων και $a \in E$ αλγεβρικό πάνω από το K. Δείξτε ότι το a είναι διαχωρίσιμο πάνω από το K εάν και μόνον εάν $K(a) = K(a^{p^n})$ για κάθε θετικό ακέραιο n. (Προσπαθείστε να δώσετε μια απ' ευθείας απόδειξη αυτής τής πρότασης, δηλ. χωρίς χρήση τής άσκησης 7 τού φυλλαδίου 5).

*****Πρόβλημα 8.** Έστω p περιττός πρώτος και $F = F_{p^n}$ το πεπερασμένο σώμα με p^n στοιχεία.
α) Δείξτε ότι το σώμα $F^2 = \{a^2, a \in F\}$ έχει $\frac{p^n+1}{2}$ στοιχεία. Συμπεράνατε ότι, αν $t \in F$ τότε και το σύνολο $t - F^2 = \{t - a^2, a \in F\}$ έχει $\frac{p^n+1}{2}$ στοιχεία.
β) Για $t \in F$ δείξτε ότι το σύνολο $F \cap (t - F)$ είναι μή κενό και συμπεράνατε ότι κάθε στοιχείο c τού F γράφεται στην μορφή $c = a^2 + b^2$, $a, b \in F$.
γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ έχει μή τετριμμένη λύση στο F (τετριμμένη λύση είναι η $x = y = z = 0$).