ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2007-08
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #7

*__Πρόβλημα 1.__ Άσκηση # 1, & 6.1 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

*__Πρόβλημα 2.__ Άσκηση # 5, & 6.1 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

*__Πρόβλημα 3.__ Άσκησεις # 5 και 6, & 3.5 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

**__Πρόβλημα 4.__ Έστω K σώμα χαρακτηριστικής p και έστω $a \in K$ στοιχείο που δεν είναι p- ρίζα στοιχείου τού K (δηλ. $a \neq c^p$, για οποιοδήποτε $c \in K$). Έστω $b \in \bar{K}$ ρίζα τής εξίσωσης $x^p - a = 0$. Βρείτε το $\mathrm{Gal}(k(b)/K)$.

**__Πρόβλημα 5.__ Έστω $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο με μία μόνο πραγματική ρίζα. Έστω $E \leq \mathbb{C}$ το σώμα ανάλυσης τού $f(x)$. Δείξτε ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ είναι ισόμορφη προς την ομάδα S_3 των μεταθέσεων τριών στοιχείων.

**__Πρόβλημα 6.__ Έστω m, n φυσικοί αριθμοί με $m \mid n$. Όπωσείδαμε στο πρόβλημα 5, φυλλάδιο 6 έχουμε ότι $F_{p^m} \leq F_{p^n}$. Δείξτε ότι η παραπάνω επέκταση είναι επέκταση Galois και δείξτε ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(F_{p^n}/F_{p^m})$ είναι κυκλική ομάδα.

**__Πρόβλημα 7.__ Δείξτε ότι η ομάδα Galois τής επέκτασης $F_{p^n} \leq \overline{\mathbb{Z}_p}$ είναι άπειρη ομάδα.