ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2007-08
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #9

***Πρόβλημα 1.** Άσκηση # 1, & 7.3 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 2.** Άσκηση # 2, & 7.3 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

***Πρόβλημα 3.** Άσκηση # 3, & 7.3 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

****Πρόβλημα 4.** Άσκήσεις # 9 και 10, & 7.3 από το βιβλιο τού R.B. Ash.

****Πρόβλημα 5.** α) Έστω p πρώτος αριθμός και ω μια μιγαδική πρωταρχική p-ρίζα τής μονάδος. Έστω $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Δείξτε ότι $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(1-\omega) = p$.
β) Έστω φυσικός $n \geq 3$ και ω μια μιγαδική πρωταρχική n-ρίζα τής μονάδος. Έστω $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Δείξτε ότι $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\omega) = 1$.

****Πρόβλημα 6.** Έστω p πρώτος και n, d φυσικοί αριθμοί. Θεωρούμε την επέκταση των πεπερασμένων σωμάτων $\mathbb{F}_{p^d} \leq \mathbb{F}_{p^{nd}}$.
α) Υπολογίστε την γραμμική απεικόνιση $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{p^{nd}}/\mathbb{F}_{p^d}} : \mathbb{F}_{p^{nd}} \to \mathbb{F}_{p^d}$. (Υπόδειξη: Άσκηση 6, Φυλλαδίου 7).
β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{p^{nd}}/\mathbb{F}_{p^d}}$ είναι επί και ότι ο πυρήνας της είναι ένας $\mathbb{F}_{p^d}$-διανυσματικός χώρος διάστασης $n-1$.

****Πρόβλημα 7.** Έστω p πρώτος και n, d φυσικοί αριθμοί. Θεωρούμε την επέκταση των πεπερασμένων σωμάτων $\mathbb{F}_{p^d} \leq \mathbb{F}_{p^{nd}}$.
α) Υπολογίστε την απεικόνιση $\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{p^{nd}}/\mathbb{F}_{p^d}} : \mathbb{F}_{p^{nd}} \to \mathbb{F}_{p^d}$. (Υπόδειξη: Άσκηση 6, Φυλλαδίου 7).
β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{p^{nd}}/\mathbb{F}_{p^d}}$ είναι επί.