ΘΕΩΡΙΑ ΣΩΜΑΤΩΝ - ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ

Τετάρτη 15 Φεβρουαρίου: Εισαγωγή στο μάθημα. Επανάληψη από την Γραμμική Άλγεβρα των εννοιών τής βάσης και τής διάστασης ενός διανυσματικού χώρου με παραδείγματα. Επανάληψη από την Άλγεβρα των ιδιοτήτων τού δακτυλίου των πολυωνύμων μεταβλητής x με συντελεστές σε σώμα: βαθμός πολυωνύμου, τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού δακτυλίου, η Ευκλείδεια διαίρεση, τα ανάγωγα πολυώνυμα και η ανάλυση σε ανάγωγα.

Παρασκευή 17 Φεβρουαρίου: Επεκτάσεις σωμάτων, ο βαθμός τής επέκτασης. Τα αλγεβρικά στοιχεία μιάς επέκτασης σωμάτων. Απόδειξη τού ότι το σύνολο των αλγεβρικών στοιχείων τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο. Παραδείγματα αλγεβρικών στοιχείων. Ιδιότητες τού συνόλου των πολυωνύμων που έχει ως ρίζα δοθέν αλγεβρικό στοιχείο μιάς επέκτασης σωμάτων.

Τετάρτη 22 Φεβρουαρίου: Το μάθημα αναβλήθηκε. Ανακοινώθηκε αναπλήρωση τού μαθήματος: Τετάρτη 14 Μαρτίου 19:00 - 20:30.

Παρασκευή 24 Φεβρουαρίου: Το ελάχιστο πολυώνυμο $\mathrm{Irr}(a, K)$ ενός αλγεβρικού στοιχείου a πάνω από σώμα K. Πολυώνυμα με ρητούς συντελεστές. Κριτήρια εύρεσης ρητών ριζών και το κριτήριο τού Eisenstein. Παραδείγματα εύρεσης τού ελάχιστου πολυωνύμου αλγεβρικών στοιχείων.

Τετάρτη 27 Φεβρουαρίου: Αλγεβρικές επεκτάσεις. Μία πεπερασμένη επέκταση σωμάτων είναι αλγεβρική. Ο δακτύλιος $K[a]$ και το σώμα $K(a)$. Απόδειξη τού βασικού θεωρήματος: Αν το στοιχείο a είναι αλγεβρικό τότε $K[a] = K(a)$, $[K(a) : K] = \deg \mathrm{Irr}(a, K)$ και η επέκταση $K \leq K(a)$ είναι αλγεβρική.

Παρασκευή 2 Μαρτίου: Αν $K \leq L \leq M$ επεκτάσεις σωματων με $[L : K] = s < \infty$, $[M : L] = t \leq \infty$ τότε $[M : K] = st$ (και άρα αλγεβρική επέκταση). Απόδειξη τού ότι αν a, b αλγεβρικά στοιχεία πάνω από το σώμα K τότε η επέκταση $K \leq K(a, b)$ είναι αλγεβρική. Ως συνέπεια δείξαμε ότι αν $K \leq L$ επέκταση σωμάτων τότε το σύνολο A των αλγεβρικών στοιχείων τού L πάνω από το K είναι σώμα και επομένως η επέκταση σωμάτων $K \leq A$ είναι (εξ ορισμού τού σώματος A) αλγεβρική. Εφαρμογή για την περίπτωση $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$ όπου δείξαμε ότι η αλγεβρική επέκταση $\mathbb{Q} \leq A$ είναι μια άπειρη αλγεβρική επέκταση.

Τετάρτη 7 Μαρτίου: Αν $K \leq L$ και $a_1, \cdots, a_n \in L$ ορίσαμε τα $K[a_1, \cdots, a_n] = K[a_1, \cdots, a_{n-1}][a_n]$ (υποδακτύλιος τού L) και $K(a_1, \cdots, a_n) = K(a_1, \cdots, a_{n-1})(a_n)$ (υπόσωμα τού L). Απόδειξη τού βασικού θεωρήματος: Αν $K \leq L \leq M$ επεκτάσεις σωμάτων με $K \leq L$ και $L \leq M$ αλγεβρικές τότε και η επέκταση $K \leq M$ είναι αλγεβρική. Γεωμετρικές κατασκευές στο επίπεδο: Ευθείες και κύκλοι που κατασκευάζονται με στοιχειώδη τρόπο από ένα δοθέν σύνολο A σημείων τού επιπέδου. Σημεία τού επιπέδου που κατασκευάζονται με στοιχειώδη τρόπο από τα σημεία τού A. Σημεία τού επιπέδου που κατασκευάζονται από τα σημεία τού A δια μέσου ακολουθίας στοιχειωδών κατασκευών.

Παρασκευή 9 Μαρτίου: Το μάθημα αναβλήθηκε. Ανακοινώθηκε αναπλήρωση τού μαθήματος: Τρίτη 27 Μαρτίου 19:00 - 20:30.

Τετάρτη 14 Μαρτίου: Δείξαμε το βασικό θεώρημα που αφορά τα κατασκευάσιμα σημεία: Αν $A = \{P_1, \ldots, P_n\}$ με $P_i = (a_i, b_i)$ ορίζουμε $K = \mathbb{Q}(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$. Τότε αν το σημείο $Q = (\bar{x}, \bar{y})$ κατασκευάζεται από το A θα πρέπει οι βαθμοί $[K(\bar{x}) : K]$, $[K(\bar{y}) : K]$, $[K(\bar{x}, \bar{y}) : K]$ να είναι δυνάμεις τού δύο.

Τετάρτη 14 Μαρτίου (απόγευμα - έκακτο μάθημα): Λύσαμε τις ασκήσεις τού φυλλαδίου 1.

Παρασκευή 16 Μαρτίου: Κατασκευάσιμοι αριθμοί. Το σύνολο των κατασκευάσιμων αριθμών είναι σώμα. Η τετραγωνική ρίζα κατασκευάσιμου αριθμού είναι κατασκευάσιμος αριθμός. Απόδειξη τού αδύνατου τής κατασκευής τού διπλασιασμού τού κύβου, τού τετραγωνισμού τού κύκλου και τής τριχοτόμισης τής γωνίας.

Τετάρτη 21 Μαρτίου: Ιδεώδες δακτυλίου. Σώμα πηλίκων δακτυλίου με ιδεώδες. Κάθε ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in K[x]$, όπου K σώμα, έχει ρίζα σε μία επέκταση L τού K βαθμού $n = \deg f(x)$. Επομένως, από την ανάλυση πολυωνύμου σε ανάγωγα, κάθε πολυώνυμο $f(x) \in K[x]$, με K σώμα, έχει ρίζα σε μία επέκταση L τού K βαθμού $\leq n = \deg f(x)$.

Παρασκευή 23 Μαρτίου: Αν $f(x) \in K[x]$, όπου K σώμα, με $\deg f(x) = n$ τότε υπάρχει επέκταση L τού K βαθμού $\leq n!$ με την ιδιότητα: $f(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_n)$ για κάποια $a_1, \ldots, a_n \in L$ και $c \in K$. Σώμα ανάλυσης (σώμα ριζων) ενός πολυωνύμου. Αν $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ σώμα ανάλυσης τού $f(x)$, όπου $n = \deg f(x)$, τότε $[L : K] \leq n!$. Αν $\sigma : K \to K'$ ισομορφισμός σωμάτων ορίσαμε για ένα πολυώνυμο f το πολυώνυμο f^σ και διατυπώσαμε ιδιότητες αυτού.

Τρίτη 27 Μαρτίου (απόγευμα - έκακτο μάθημα): Λύσαμε τις ασκήσεις τού φυλλαδίου 2.

Τετάρτη 28 Μαρτίου: Αν $\sigma : K \to K'$ ισομορφισμός σωμάτων και έστω $f(x) \in K[x]$ με ρίζα a και εστω ότι το $f^\sigma(x) \in K'[x]$ έχει ρίζα a'. Δείξαμε ότι υπάρχει ισομορφισμός σωμάτων $\sigma_1 : K(a) \to K'(a')$ με $\sigma_1(k) = \sigma(k)$ για κάθε $k \in K$. Αρχίσαμε τήν απόδειξη τού θεωρήματος: Αν $\sigma : K \to K'$ ισομορφισμός σωμάτων και έστω $f(x) \in K[x]$ με σώμα ριζών L και έστω ότι το $f^\sigma(x) \in K'[x]$ έχει σώμα ριζών L'. Δείξαμε ότι υπάρχει ισομορφισμός σωμάτων $\tilde{\sigma} : L \to L'$ με $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(k)$ για κάθε $k \in K$.

Παρασκευή 30 Μαρτίου: Ολοκλήρωση τής απόδειξης τού παραπάνω θεωρήματος. Αλγεβρικά κλειστά σώματα. Ορισμός, ιδιότητες και παραδείγματα.

Τετάρτη 4 Απριλίου: Αλγεβρική θήκη σώματος. Αν $K \leq L$ επέκταση σωμάτων με L αλγεβρικά κελιστό τότε το σώμα $A_{L/K}$ είναι αλγεβρική θήκη τού K.

Απόδειξη τής ύπαρξης αλγεβρικής θήκης. Αν $\sigma : K \to K'$ ισομορφισμός σωμάτων και $\bar{K}$, $\bar{K}'$ αλγεβρικές θήκες των K, K' αντίστοιχα τότε υπάρχει ισομορφισμός $\tilde{\sigma} : \bar{K} \to \bar{K}'$ που επεκτείνει τον σ. Εμβυθίσεις σωμάτων. Έστω $\sigma : K \to K'$ εμβύθιση σωμάτων και $\tilde{\sigma} : L \to L'$ επέκταση (ανύψωση) τού σ, αν $a \in L$ είναι ρίζα τού $f(x) \in K[x]$ τότε το $\tilde{\sigma}(a)$ είναι ρίζα τού $f^{\sigma}(x) \in K'[x]$.

Παρασκευή 6 Απριλίου: Λύσαμε ασκήσεις.

Τετάρτη 25 Απριλίου: Δείξαμε ότι αν $\sigma : K \hookrightarrow E$ εμβύθιση σωματων με E αλγεβρικά κλειστό και a αλγεβρικό πάνω από το K τότε υπάρχει επέκταση (ανύψωση) $\tilde{\sigma} : K(a) \hookrightarrow E$ τού σ. Υπενθύμιση τού λήμματος τού Zorn. Αποδείξαμε (γενικεύοντας το παραπάνω) ότι αν $\sigma : K \hookrightarrow E$ εμβύθιση σωματων με E αλγεβρικά κλειστό και $K \leq L$ αλγεβρική επέκταση τότε υπάρχει επέκταση (ανύψωση) $\tilde{\sigma} : L \hookrightarrow E$ τού σ.

Παρασκευή 27 Απριλίου: Κάναμε εφαρμογές της προηγούμενης πρότασης με βασικότερη την απόδειξη ότι δύο αλγεβρικές θήκες ενός σώματος K είναι ισόμορφες (και ο ισομορφισμός αφήνει αναλοίωτα τα στοιχεία τού σώματος K). Λύσαμε ασκήσεις.

Τετάρτη 2 Μαϊου: Κανονικές επεκτάσεις. Ορισμός και παραδείγματα. Δείξαμε ότι μια επέκταση σώματος K είναι κανονική εαν και μονον εαν είναι σώμα ριζών οικογένειας πολυωνύμων τού $K[x]$.

Παρασκευή 4 Μαϊου: Ιδιότητες κανονικών επεκτάσεων. Αν $K \leq L$ και $L \leq E$ είναι κανονικές δεν συνεπάγεται ότι η $K \leq E$ είναι κανονική. Αν $K \leq L \leq E$ επεκτάσεις σωμάτων με $K \leq E$ κανονική τότε η $L \leq E$ είναι κανονική (δεν συνεπάγεται όμως ότι η $K \leq L$ είναι κανονική). Διαχωρίσιμα πολυώνυμα. Αποδείξαμε ότι ένα $f(x) \in K[x]$ γράφεται ως $f(x) = (x-a)^2 g(x) \in \bar{K}[x]$ (όπου $\bar{K}$ = αλγεβρική θήκη τού K) αν και μονον αν $(f(x), Df(x)) \neq 1$ στο $K[x]$ (όπου $Df(x)$ = η παράγωγος τού $f(x)$). Λύσαμε ασκήσεις.

Τετάρτη 9 Μαϊου: Ορίσαμε την ομάδα αυτομορφισμών $\mathrm{Aut}(E)$ ενός σώματος E και την ομαδα Galois $Gal(E/K)$ μιας αλγεβρικής επέκτασης $K \leq E$. Δείξαμε ότι αν η επέκταση $K \leq E$ είναι πεπερασμένη τότε $\#Gal(E/K) \leq [E : K]$.

Παρασκευή 11 Μαϊου: Δείξαμε πότε ισχύει η ισότητα στην προηγούμενη πρόταση. Αν E σώμα και G πεπερασμένη υποομάδα τής ομάδας αυτομορφισμών $\mathrm{Aut}(E)$ τότε ορίσαμε το υπόσωμα $E^G = \{a \in E,\ \sigma(a) = a,\ \forall \sigma \in G\}$ τού E. Δείξαμε ότι η επέκταση $E^G \leq E$ είναι αλγεβρική, διαχωρίσιμη και κανονική. Η απόδειξη βασίστηκε στην κατασκευή τού $\mathrm{Irr}(a, E^G)$, όπου $a \in E$, ως το πολυώνυμο με ρίζες τα (διαφορετικά μεταξύ τους) στοιχεία τού συνόλου $\{\sigma(a),\ \sigma \in G\}$.

Τετάρτη 16 Μαϊου: Αναφέραμε ότι μια διαχωρίσιμη πεπερασμένη επέκταση είναι απλή επέκταση. Αποδείξαμε ότι μια διαχωρίσιμη επέκταση $K \leq E$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $a \in E$ ισχύει $\deg \mathrm{Irr}(a, K) \leq N$, για κάποιον φυσικό N, ικανοποιεί την σχέση $[E : K] \leq N$. Αποδείξαμε ότι αν για μια πεπερασμένη επέκταση $K \leq E$ έχουμε

ότι $\#\mathrm{Gal}(E/K) = [E : K]$ τότε $K = E^{\mathrm{Gal}(E/K)}$.

Παρασκευή 18 Μαΐου: Ορίσαμε τις επεκτασεις Galois και αποδείξαμε τον εξής χαρακτηρισμό τους: Η επέκταση $K \leq E$ είναι επέκταση Galois αν και μόνον αν το E είναι σώμα ανάλυση (ριζών) διαχωρίσιμου πολυωνύμου τού $K[x]$. Ορίσαμε και αποδείξαμε την αντιστοιχία Galois. Ορίσαμε κανονικές υποομάδες ομάδας.

Τετάρτη 23 Μαΐου: Αποδείξαμε ότι δια τής αντιστοιχίας Galois οι κανονικές υποομάδες H τής $\mathrm{Gal}(E/K)$ αντιστοιχούν σε Galois επεκτάσεις $K \leq E^H$. Αναφέραμε περιληπτικά ορισμένα πράγματα για την επιλυσιμότητα εξισώσεων με ριζικά και για το πώς υπεισέρχεται η θεωρία ομάδων σε αυτό το πρόβλημα.

Παρασκευή 25 Μαΐου: Κάναμε αναλυτικό παράδειγμα υλοποίησης τής αντιστοιχίας Galois. Λύσαμε ασκήσεις.

Δευτέρα 28 Μαΐου (έκτακτο μάθημα): Λύσαμε ασκήσεις από τα φυλλάδια 4 και 5.