Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2011-12
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. **α)** Δείξτε ότι το $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(\sqrt{5}, \mathbb{Q})$.
β) Δείξτε ότι το $-1+\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(-1+\sqrt{5}, \mathbb{Q})$.
γ) Δείξτε ότι το $\sqrt{1+\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(\sqrt{1+\sqrt{5}}, \mathbb{Q})$.
δ) Δείξτε ότι το $\sqrt[7]{5} \in \mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(\sqrt[7]{5}, \mathbb{Q})$.

Πρόβλημα 2. Έστω $F \leq K \leq L$ και $a \in L$.
Έχουμε δεί στην θεωρία ότι αν το a είναι αλγεβρικό $|F$ τότε είναι και αλγεβρικό $|K$.
Ποιά είναι η σχέση τού $\mathrm{Irr}(a, F)$ με το $\mathrm{Irr}(a, K)$;

Πρόβλημα 3. **α)** Έστω p πρώτος και έστω $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ με $p \nmid a_n$. Ορίζουμε ως $\overline{f(x)} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \cdots + \bar{a}_n x^n \in \mathbb{Z}_p[x]$. Δείξτε ότι αν το $\overline{f(x)}$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_p[x]$ τότε το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$ (και επομένως και στο $\mathbb{Q}[x]$).
β) Δείξτε ότι το παρακάτω πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο:
$x^3 + 2x + 1$.

Πρόβλημα 4. Έστω K ένα σώμα. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $K[x]$ περιέχει άπειρο πλήθος αναγώγων πολυωνύμων.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Q}[\sqrt{1+\sqrt{3}}]$ είναι σώμα και βρείτε την διάστασή του ως διανυσματικού χώρου $|\mathbb{Q}$.

Πρόβλημα 6. **α)** Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + 2x + 2$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$.
β) Ως πολυώνυμο περιτού βαθμού έχει μια πραγματική ρίζα, έστω a. Εκφράστε το $\frac{1}{1-a}$ ως στοιχείο τού $\mathbb{Q}[a]$.

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^n + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο αν και μόνον αν $n = 2^k$για κάποιον ακέραιο $k \geq 0$.

Πρόβλημα 8. **α)** Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $a \neq \pm b$ και $a^2, b^2 \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(a, b) = \mathbb{Q}(a + b)$.
β) Βρείτε τον βαθμό $[\mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] : \mathbb{Q}]$.