Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2011-12
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

Πρόβλημα 1. Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων με $[E : K] = p$ πρώτος αριθμός.
α) Δείξτε ότι αν M σώμα με $K \leq M \leq L$ τότε $M = K$ ή $M = L$.
β) Δείξτε ότι $E = K[a]$ για κάποιο $a \in E$.

Πρόβλημα 2. Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$. Εστω $f(x) \in K[x]$ ένα μή σταθερό πολυώνυμο. Θέτουμε $b = f(a)$. Έχουμε ότι $K \leq K(b) \leq E$. Δείξτε ότι το a είναι αλγεβρικό πάνω από το σώμα $K(b)$.

Πρόβλημα 3. Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$ αλγεβρικό στοιχείο πάνω από το K. Υποθέτουμε ότι το $\mathrm{Irr}(a, K)$ είναι περιττού βαθμού. Δείξτε ότι $K(a) = K(a^2)$. Ισχύει το ίδιο όταν ο βαθμός είναι άρτιος;

Πρόβλημα 4. Έστω $K \leq E$ μια πεπερασμένη επέκταση σωμάτων. Έστω $f(x) \in K[x]$ ένα ανάγωγο πολυώνυμο με $\deg f(x) \nmid [E : K]$. Δείξτε ότι το $f(x)$ δεν έχει ρίζες στο σώμα E.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι η γωνία των 30^0 (και επομένως και το κανονικό 12-γωνο) είναι κατασκευάσιμη γωνία.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι το κανονικό 9-γωνο δεν είναι κατασκευάσιμο.

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι η γωνία των 36^0 (και επομένως και το κανονικό 10-γωνο) είναι κατασκευάσιμη γωνία (δείτε την άσκηση # 4 τής παραγράφου & 7.5 από το βιβλίο τού Fraleigh.

Πρόβλημα 8. Έστω $K \leq E$ μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων. Έστω R δακτύλιος με $K \subseteq R \subseteq E$. Δείξτε ότι ο R είναι σώμα. Ισχύει το ίδιο αν η επέκταση δεν είναι αλγεβρική;

Πρόβλημα 9. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε ως $2^{1/n}$ την μοναδική πραγματική θετική ρίζα τής εξίσωσης $x^n - 2 = 0$ και έστω $A_n = \mathbb{Q}(2^{1/n})$.
α) Υπολογίστε τον βαθμό τής επέκτασης $\mathbb{Q} \leq A_n$.
β) Αν $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \mid n$ δείξτε ότι $A_m \leq A_n$ και υπολογίστε τον βαθμό $[A_n : A_m]$.
γ) Αν $(m, n) = 1$ δείξτε ότι $A_{mn} = \mathbb{Q}(2^{1/m}, 2^{1/n})$.

Πρόβλημα 10. Έστω a, b στοιχεία κάποιου σώματος K και έστω ότι το a είναι το τετράγωνο κάποιου στοιχείου στο σώμα $K(\sqrt{b})$. Δείξτε τότε ότι είτε το a είτε το ab είναι το τετράγωνο κάποιου στοιχείου στο K.