Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2011-12
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Πρόβλημα 1. Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E τού $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ και βρείτε τον βαθμό $[E : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 2. Έστω $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Έστω $E \subseteq \mathbb{C}$ το σώμα ριζών του και έστω $\xi \in E$ μια ρίζα τού $f(x)$.
α) Δείξτε ότι και το $\xi^2 - 2 \in E$ είναι, επίσης, ρίζα τού $f(x)$.
β) Βρείτε ποιά είναι η τρίτη ρίζα τού $f(x)$, ως έκφραση τής ξ.
γ) Βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $[E : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 3. Έστω $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ και έστω $E \subseteq \mathbb{C}$ το σώμα ριζών του.
α) Δείξτε ότι το $f(x)$ είναι ανάγωγο και ότι έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα ξ.
β) Έστω ρ μια μιγαδική ρίζα τού $f(x)$. Δείξτε ότι $[\mathbb{Q}(\xi, \rho) : \mathbb{Q}] = 6$.
γ) Δείξτε ότι $E = \mathbb{Q}(\xi, \rho)$.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα πρέπει να έχει άπειρα το πλήθος στοιχεία. Επομένως, τα σώματα $\mathbb{Z}_p$, p =πρώτος αριθμός, δεν είναι αλγεβρικά κλειστά σώματα.

Πρόβλημα 5. Έστω $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
α) Δείξτε ότι το $f(x)$ είναι ανάγωγο.
β) Έστω ξ μια ρίζα τού $f(x)$ σε μια επέκταση τού $\mathbb{Z}_5$. Δείξτε ότι το $E = \mathbb{Z}_5(\xi)$ είναι ένα σώμα ριζών τού $f(x)$.
γ) Δείξτε ότι το E έχει 25 στοιχεία και γράψτε τα ως πολυωνυμικές εκφράσεις τού ξ με συντελεστές στο $\mathbb{Z}_5$.

Πρόβλημα 6. Έστω p ένας πρώτος αριθμός και $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$. Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E τού $f(x)$ και βρείτε τον βαθμό $[E : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 7. **α)** Έστω $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x]$ βαθμού n. Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = m$. Αν $(n, m) = 1$ δείξτε ότι το $f(x)$ παραμένει ανάγωγο και ως πολυώνυμο τού $F[x]$.
β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - 9x^3 + 15x + 6$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})[x]$.

Πρόβλημα 8. Έστω $a = \sqrt{3 + \sqrt{7}}$.
α) Βρείτε το ελάχιστο (ανάγωγο) πολυώνυμο τού a πάνω από το $\mathbb{Q}$.
β) Βρείτε μια βάση τού $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Q}(a)$ και εκφράστε το στοιχείο $\frac{1}{a}$ ως προς την παραπάνω βάση.

Πρόβλημα 9. Έστω $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
α) Βρείτε το σώμα ανάλυσης (ριζών) $E \subseteq \mathbb{C}$ τού $f(x)$.
β) Είναι το $f(x)$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$;

γ) Βρείτε τον βαθμό $[E : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 10. Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a, b \in E$. Υποθέτουμε ότι $[K(a) : K] = n$, $[K(b) : K] = m$ με $(n, m) = 1$.
α) Δείξτε ότι $K(a) \cap K(b) = K$.
β) Δείξτε ότι $[K(a, b) : K] = mn$.