Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2011-12
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Πρόβλημα 1. Βρείτε όλες τίς $\mathbb{Q}$-εμβυθίσεις σωμάτων $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \hookrightarrow \mathbb{C}$, δηλ. η σ είναι μια ανύψωση (επέκταση) τής ταυτοτικής εμβύθισης $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Πρόβλημα 2. α) Βρείτε όλες τίς $\mathbb{Q}$-εμβυθίσεις σωμάτων $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \hookrightarrow \mathbb{R}$.
β) Βρείτε όλες τίς $\mathbb{Q}$-εμβυθίσεις σωμάτων $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Πρόβλημα 3. Βρείτε όλες τίς $\mathbb{Q}$-εμβυθίσεις σωμάτων $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$.

Πρόβλημα 4. α) Βρείτε όλους τούς $\mathbb{Q}$-αυτομορφισμούς $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
β) Βρείτε όλους τούς $\mathbb{Q}$-αυτομορφισμούς $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Πρόβλημα 5. Είναι η επέκταση σωμάτων $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ κανονική;

Πρόβλημα 6. Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = 2$. Δείξτε ότι η επέκταση είναι κανονική.

Πρόβλημα 7. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ πολυώνυμο περιττού βαθμού ≥ 3 το οποίο έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα $a \notin \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι η επέκταση $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(a)$ δεν είναι κανονική.

Πρόβλημα 8. Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $a^4 = 5$. Δείξτε ότι:
α) Το $\mathbb{Q}(ia^2)$ είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}$.
β) Το $\mathbb{Q}(a + ia)$ είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}(ia^2)$.
γ) Το $\mathbb{Q}(a + ia)$ δεν είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}$.

Πρόβλημα 9. Δείξτε ότι η επέκταση $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ είναι κανονική επέκταση.