Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2011-12
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Πρόβλημα 1. Έστω $K \leq M \leq E$ επεκτάσεις σωμάτων με $K \leq E$ διχωρίσιμη. Δείξτε ότι οι επεκτάσεις $K \leq M$ και $M \leq E$ είναι διαχωρίσιμες.

Πρόβλημα 2. **α)** Έστω $\mathbb{Z}_p \leq E$, p ==πρώτος, επέκταση σωμάτων και $a \in E$. Δείξτε ότι $(x-a)^p = x^p - a^p$.
β) Δείξτε ότι αν $a \notin \mathbb{Z}_p(a^p)$ τότε η επέκταση $\mathbb{Z}_p(a^p) \leq E$ δεν είναι διαχωρίσιμη.

Πρόβλημα 3. Για κάθε μια από τις παρακάτω επεκτάσεις $\mathbb{Q} \leq E$, υλοποιήστε την αντιστοιχία Galois. Δηλαδή, βρείτε την ομάδα Galois $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, βρείτε όλες τις υποομάδες H τής G και κατατάξτε της ανάλογα με την τάξη τους, βρείτε τις αντίστοιχες ενδιάμεσες επεκτάσεις $\mathbb{Q} \leq L \leq E$ και κατατάξτε της ανάλογα με τον βαθμό τους $[L : \mathbb{Q}]$, βρείτε ποιές από τις επεκτάσεις $\mathbb{Q} \leq L$ είναι Galois και ποιές υποομάδες H τής G είναι κανονικές.
α) E είναι το σώμα ανάλυσης τού $f(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
β) E είναι το σώμα ανάλυσης τού $f(x) = (x^2-2)(x^2-5) \in \mathbb{Q}[x]$.
γ) E είναι το σώμα ανάλυσης τού $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 4. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο και E τό σώμα ανάλυσής του στο $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι το $f(x)$ έχει μία ρίζα στο $\mathbb{C}$ που δεν είναι στο $\mathbb{R}$. Έστω $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\sigma(z) = \bar{z}$ (συζυγία μιγαδικών αριθμών). Δείξτε ότι η σ επάγει ένα στοιχείο τής $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ (δηλ. ο περιορισμός τής σ στο E ορίζει ένα στοιχείο τής $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$). Βρείτε το αντίστοιχο ενδιάμεσο σώμα $\mathbb{Q} \leq L \leq E$ τής κυκλικής υποομάδας $< \sigma > \leq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ και τον βαθμό τής επέκτασης $[L : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 5. Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο με σώμα ανάλυσης E και έστω ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ είναι αβελιανή. Δείξτε ότι αν a είναι μια οποιαδήποτε ρίζα τού $f(x)$ τότε $E = \mathbb{Q}(a)$. (Υπόδειξη: αντιστοιχία κανονικών υποομάδων και ενδιάμεσων επεκτάσεων Galois).

Πρόβλημα 6. Έστω $f(x) = x^4 + 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ και E το σώμα ανάλυσής του. Δείξτε ότι η ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ έχει τάξη 4 και βρείτε με ποιά ακριβώς ομάδα τάξης 4 είναι ισόμορφη.