ΠΡΟΟΔΟΣ - ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, Τ.Ε.Τ.Υ.

1 Δεκεμβρίου 2006, Διδάσκων: Α. Κουβιδάκης

Πρόβλημα 1. [Μονάδες 10] Βρείτε τα

α) $\cos(\tan^{-1} 2)$

β) $\tan(\sin^{-1} 0.2)$

Πρόβλημα 2. [Μονάδες 10] Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{3x}}\,, \quad x > 0\,.$$

Βρείτε το $f'(3)$, δηλ. την παράγωγο τής f στο $x = 3$.

Πρόβλημα 3. [Μονάδες 15] Εστω $f(x) = x^3 + e^x$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x_0 με την ιδιότητα $f(x_0) = 0$.

Πρόβλημα 4. [Μονάδες 20] Εστω C η καμπύλη στο xy-επίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^3 + 2x = 2$. Έστω (ϵ) η εφαπτόμενη ευθεία τής C στο σημείο $P = (1, -1)$. Βρείτε το σημείο τομής τής (ϵ) με τον x-άξονα.

Πρόβλημα 5. [Μονάδες 25] Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κλειστή δεξαμενή σε σχήμα όρθιου κυλίνδρου με όγκο $3\,m^3$. Το κόστος κατασκευής τής βάσης ανέρχεται σε 100 ευρώ ανά m^2, τής οροφής σε 50 ευρώ ανά m^2 και τής παράπλευρης επιφάνειας σε 400 ευρώ ανά m^2. Βρείτε τις διαστάσεις τής δεξαμενής ώστε το κόστος να είναι το ελάχιστο.
Σημείωση: Αν η δεξαμενή έχει ακτίνα βάσης r και ύψος h τότε ο όγκος της ισούται με $\pi r^2 h$, το εμβαδόν τής βάσης με πr^2 και το εμβαδόν τής παράπλευρης επιφάνειας με $2\pi r h$.

Πρόβλημα 6. [Μονάδες 20] Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{x}{5-3x^2}\,dx$.

β) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$.