Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, Χειμερινό Εξάμ. 2017-18
ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Εβδομάδα 25-29 Σεπτεμβρίου: Μελετήσαμε τά σύνολα $k[x]$ (πολυώνυμα μεταβλητής x με συντελεστές σε σώμα k), $M_n(k)$ ($n \times n$ πίνακες με στοιχεία από τό σώμα k), $\mathrm{End}_k(V)$ (k-γραμμικές απεικονίσεις $\phi : V \to V$). Είδαμε ότι εφοδιάζονται με δύο πράξεις που τά καθιστούν δακτυλίους. Είδαμε, επίσης, ότι υπάρχει και ένας βαθμωτός πολλαπλασιασμός στοιχείων τού σωματος k με στοιχεία τών παραπάνω δακτυλίων που τούς καθιστούν k-άλγεβρες. Μετά επικεντρωθήκαμε στην μελέτη τού δακτυλίου $k[x]$: διαιρετότητα πολυωνύμων, ανάγωγα πολυώνυμα, ανάλυση πολυωνύμου σε ανάγωγα, ευκλείδειος αλγόριθμος, μέγιστος κοινός διαιρέτης πολυωνύμων.

Εβδομάδα 2-6 Οκτωβρίου: Πρώτα μεταξύ τους πολυώνυμα. Αλγεβρικά κλειστά σώματα. Τό θεμελιώδες θεώρημα τής Άλγεβρας. Η ανάλυση ενός πολυωνύμου τού $\mathbb{C}[x]$ σε ανάγωγα και τά ανάγωγα πολυώνυμα τού $\mathbb{C}[x]$. Η ανάλυση ενός πολυωνύμου τού $\mathbb{R}[x]$ σε ανάγωγα και τά ανάγωγα πολυώνυμα τού $\mathbb{R}[x]$. Υπενθύμιση τής αντιστοιχίας γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων (κατόπιν επιλογής βάσεων). Ο πίνακας αλλαγής βάσης. Η μορφή τού πίνακα μιάς γραμμικής απεικόνισης όταν αλλάζουμε τήν επιλογή τών βάσεων.

Εβδομάδα 9-13 Οκτωβρίου: Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα γραμμικής απεκόνισης $\phi : V \to V$. Ιδιοτιμές τετραγωνικού πίνακα. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο τετραγωνικού πίνακα. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο γραμμικής απεκόνισης $\phi : V \to V$. Η ορίζουσα ενός βαθμωτού τετραγωνικού πίνακα με στοιχεία τετραγωνικούς πίνακες. Διαγωνίσιμες γραμμικές απεικονίσεις. Διαγωνίσιμοι πίνακες. Αθροίσματα διανυσματικών υπόχωρων.

Εβδομάδα 16-20 Οκτωβρίου: Ευθέα αθροίσματα υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου. Τό άθροισμα τών ιδιόχωρων μιας γραμμικής απεικόνισης είναι ευθύ άθροισμα. Κριτήριο διαγωνισιμότητας γραμμικής απεικόνισης (ή πίνακα) σε σχέση με τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Συζήτηση περί τών ασκήσεων τού μαθήματος.

Εβδομάδα 23-27 Οκτωβρίου: Τό ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ ενός πίνακα. Τό $m_A(x)$ διαιρεί τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού $\chi_A(x)$. Όμοιοι πίνακες έχουν τό ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο. Τό ελάχιστο πολυώνυμο $m_\phi(x)$ μιας γραμμικής απεικόνισης $\phi : V \to V$. Ιδιότητες τού ελαχίστου πολυωνύμου. Οι ρίζες τού ελαχίστου πολυωνύμου είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές. Πρακτικοί τρόποι εύρεσης τού ελαχίστου πολυωνύμου. Τό ελάχιστο και τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός μηδενοδύναμου πίνακα.

Εβδομάδα 30 Οκτωβρίου - 3 Νοεμβρίου: ϕ-αναλλοίωτοι υπόχωροι ενός ενδομορφισμού $\phi : V \to V$. Ο πίνακας τού ενδομορφισμού (ως προς κατάλληλα επιλεγμένη βάση) όταν ο V διασπάται σε ευθύ άθροισμα ϕ-αναλλοίωτων υπόχωρων. Τό ελάχιστο πολυώνυμο ενός διαγώνιου πίνακα. Κριτήριο διαγωνισιμότητας που εμπεριέχει το ελάχιστο πολυώνυμο: Η $\phi : V \to V$ είναι διαγωνίσιμη αν και μόνον αν $m_\phi(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_s)$, όπου λ_i, $i = 1, \ldots, s$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές τής ϕ. Συζητήσαμε ασκήσεις από τά φυλλάδια.

Εβδομάδα 6 Νοεμβρίου - 10 Νοεμβρίου: Αποδείξαμε την εξής πρόταση: Έστω $\phi : V \to V$ γραμμική απεικόνιση με $m_\phi(x) = p_1(x)p_2(x)$ με $(p_1(x), p_2(x)) = 1$ μονικά πολυώνυμα. Τότε έχουμε διάσπαση $V = V_1 \oplus V_2$ σε ϕ-αναλλοίωτους υπόχωρους, όπου $V_i = \ker(p_i(\phi))$. Επίσης, αν $\phi_i = \phi|_{V_i}$ τότε $m_{\phi_i}(x) = p_i(x)$, $i = 1, 2$. Αποδείξαμε το θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης. Εξειδικεύσαμε το παραπάνω θεώρημα στην περίπτωση που το σώμα είναι αλγεβρικά κλειστό. Γι' αυτή την περίπτωση, μιλήσαμε για γενικευμένους ιδιόχωρους και την διάστασή τους και δείξαμε ότι η μελέτη ενός πίνακα (ή τής αντίστοιχης γραμμικής απεικόνισης) ανάγεται στην μελέτη μηδενοδύναμων πινάκων.

Εβδομάδα 13 Νοεμβρίου - 17 Νοεμβρίου: Μηδενοδύναμες απεικονίσεις και πίνακες. Δείκτης τ μηδενοδύναμου πίνακα-απεικόνισης. Ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Πίνακας Μυδενοδύναμης απιεικόνισης $\phi : V \to V$ με δείκτη $\tau = \mathrm{dimV}$. Η ακολουθία των υπόχωρων $A_i = \ker\phi^i$, $i = 0, \ldots, \tau$. Μιλήσαμε για χώρους πηλίκων και το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών που θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη τού θεωρήματος Jordan. Δείξαμε ότι αν $\rho_i = \dim(A_i/A_{i-1})$ τότε $\rho_i \leq \rho_{i-1}$.

Εβδομάδα 20 Νοεμβρίου - 24 Νοεμβρίου: Το θεώρημα τού Jordan και η απόδειξή του. Παραδείγματα.

Εβδομάδα 27 Νοεμβρίου - 1 Δεκεμβρίου: Συζητήσαμε τις ασκήσεις. Επανάληψη στο κανονικό εσωτερικό γινόμενο τού k^n, όπου $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Γωνία διανυσμάτων, κάθετα διανύσματα, ορθοκανονικές βάσεις υπόχωρων τού k^n, τό θεώρημα Gram - Schmidt. Μοναδιαίοι πίνακες, ιδιότητες, χαρακτηρισμός με χρήση τού κανονικού εσωτερικού γινομένου, ιδιοτιμές. Ένας πίνακας είναι μοναδιαίος αν και μόνον αν οι γραμμές του (ή οι στήλες του) αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Εβδομάδα 4 Δεκεμβρίου - 8 Δεκεμβρίου: Οι ερμητιανοί πίνακες (μιγαδικοί ή πραγματικοί) είναι μοναδιαία διαγωνίσιμοι. Το λήμμα του Schur. Μιγαδικοί κανονικοι πίνακες είναι μοναδιαία διαγωνίσιμοι. Τετραγωνικές μορφές και συμμετρικοί πίνακες. Η κανονική μορφή μιας τετραγωνικής μορφής. Θετικά ορισμένες και θετικά ημιορισμένες τετραγωνικές μορφές (πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες) και το κριτήριο με τις ιδιοτιμές.

Εβδομάδα 11 Δεκεμβρίου - 15 Δεκεμβρίου: Τάξη και υπογραφή ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα/ μιας τετραγωνικής μορφής. Μέγιστα και ελάχιστα τετραγωνικών μορφών στην σφαίρα. Κανονική μορφή εξίσωσης 2ου βαθμού. Εσωτερικά γινόμενα. Ευκλείδειοι (πραγματικοί ή μιγαδικοί) χώροι. Ο δυικός χώρος. Το θεώρημα τού Riesz. Η συζυγής μιας γραμμικής απεικόνισης. Συμμετρικές (ερμητιανές) απεικονίσεις. Ισομετρίες (μοναδιαίες) απεικονίσεις.