

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016–2017

2η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία: 18 Νοεμβρίου 2016

1. Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $\omega \notin \omega$ (με άλλα λόγια, το ω δεν είναι φυσικός αριθμός).
- (ii) Για κάθε $n \in \omega$, ισχύει $\omega \notin n$.
- (iii) Για κάθε $n \in \omega$, το n δεν είναι επαγωγικό.
- (iv) Το σύνολο $\omega \cup \{\omega\}$ δεν είναι φυσικός αριθμός.
- (v) Το σύνολο $\omega \cup \{\omega\}$ είναι μεταβατικό αλλά όχι επαγωγικό.

2. Θεωρήστε το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$, δηλαδή το δυναμοσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών. Δείξτε τα ακόλουθα:

- (i) Το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$ δεν είναι φυσικός αριθμός.
- (ii) Το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$ δεν είναι επαγωγικό.
- (iii) $\omega \subseteq \mathcal{P}(\omega)$.
- (iv) $\mathcal{P}(\omega) \setminus \omega \neq \emptyset$. Μάλιστα, δώστε δύο παραδείγματα (διαφορετικών) συνόλων που να ανήκουν στο $\mathcal{P}(\omega) \setminus \omega$.

3. Έστω σύνολο X . Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το X είναι μεταβατικό (δηλαδή, αν $b \in a \in X$, τότε $b \in X$).
- (ii) $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.
- (iii) $\bigcup X \subseteq X$.

3 $\frac{1}{2}$. Με αφορμή την Άσκηση 4 (iii) της 1ης Σειράς Ασκήσεων, ελπίζω να έχετε μάθει ότι αν ένα σύνολο A είναι μεταβατικό, τότε και το $\bigcup A$ είναι μεταβατικό. Ωστόσο, δείξτε ότι δεν ισχύει και το αντίστροφο, δίνοντας ένα γρήγορο αντιπαράδειγμα.

4. Αυτή είναι ουσιαστικά η Άσκηση 3.10 (σελ. 60), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη, με μόνη διαφορά το ότι εμείς γράφουμε x^+ για το επόμενο σύνολο του x (αντί για x' που γράφει ο Σκανδάλης).

Αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικούς αριθμούς $m, n \in \omega$, ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $m < n \iff m^+ \leq n$.
- (ii) $m < n \iff m^+ < n^+$.
- (iii) $m < n^+ \iff m \leq n$.
- (iv) $m \leq n^+ \iff m < n \vee m = n^+$.

Προσοχή! Η διατύπωση στο ερώτημα (iv) έχει ένα λάθος στο δεξί μέλος της ισοδυναμίας. Αρχικά, δείξτε την ύπαρξη λάθους δίνοντας αντιπαράδειγμα. Κατόπιν, διορθώστε το λάθος και αποδείξτε τη σωστή διατύπωση.

5. Άσκηση 3.21 (σελ. 61), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

6. Άσκηση 3.26 (σελ. 61-62), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.
7. Δείξτε ότι, όπως τα ορίσαμε στο μάθημα, τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ (των ακεραίων και ρητών αριθμών, αντίστοιχα) υπάρχουν. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι η ύπαρξή τους προκύπτει από τα αξιώματα.

Υπόδειξη: και στις δύο περιπτώσεις, υπεισέρχεται το αξιωματικό σχήμα του διαχωρισμού. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητο να καταγράψετε αυστηρά και λεπτομερώς (στη γλώσσα της συνολοθεωρίας) τους συγκεκριμένους τύπους που χρησιμοποιούνται. Αρκεί να τους περιγράψετε (σε φυσική γλώσσα) και να πείσετε τον εαυτό σας ότι, αν θέλαμε, θα μπορούσαμε όντως να τους καταγράψουμε αυστηρά και λεπτομερώς στη γλώσσα της συνολοθεωρίας.

8. Αυτή είναι ουσιαστικά η Άσκηση 3.28 (σελ. 62), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη, με το συμβολισμό όμως που χρησιμοποιήσαμε στο μάθημα.

Την ολική διάταξη $\leq_{\mathbb{Z}}$ στους ακεραίους $\mathbb{Z}$ την ορίσαμε ως εξής: για κάθε $m, n, k, l \in \omega$,

$$[(m, n)] \leq_{\mathbb{Z}} [(k, l)] \longleftrightarrow m + l \leq n + k,$$

όπου, στο αριστερό μέλος της παραπάνω ισοδυναμίας, οι κλάσεις ισοδυναμίας αναφέρονται στη σχέση ισοδυναμίας R στο $\omega \times \omega$ (μέσω της οποίας ορίσαμε το $\mathbb{Z}$), ενώ στο δεξί μέλος της παραπάνω ισοδυναμίας, τα $+$ και $\leq$ αναφέρονται στην πρόσθεση και τη διάταξη στους φυσικούς αριθμούς.

Για κάθε $n \in \omega$, ορίσαμε το $n_{\mathbb{Z}} = [(n, 0)]$, το οποίο είναι ο αντίστοιχος ακεραίος αριθμός (και με αυτόν τον τρόπο ταυτίσαμε το σύνολο ω των φυσικών αριθμών με ένα υποσύνολο του $\mathbb{Z}$). Επίσης, ορίσαμε και το $-n_{\mathbb{Z}} = [(0, n)]$, ο οποίος είναι ο προσθετικός αντίστροφος (κοινώς, ο αντίθετος) του ακεραίου $n_{\mathbb{Z}}$.

Με αυτούς τους ορισμούς, αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Για κάθε $m, n \in \omega$, ισχύει $m_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} n_{\mathbb{Z}} \longleftrightarrow m \leq n$.
 - (ii) Για κάθε $m, n \in \omega$, ισχύει $-m_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} -n_{\mathbb{Z}} \longleftrightarrow n \leq m$.
 - (iii) Για κάθε $m, n \in \omega$, ισχύει $-m_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} n_{\mathbb{Z}}$.
 - (iv) Η διάταξη $\leq_{\mathbb{Z}}$ στο $\mathbb{Z}$ δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.
 - (v) Κάθε ακεραίος αριθμός έχει (ακριβώς) έναν αμέσως επόμενο, καθώς και (ακριβώς) έναν αμέσως προηγούμενο ακεραίο αριθμό.
9. Άσκηση 3.32 (σελ. 62), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.
10. Έστω $\mathcal{X} \neq \emptyset$ ένα σύνολο τομών Dedekind (δηλαδή, κάθε στοιχείο του $\mathcal{X}$ είναι τομή Dedekind). Δείξτε ότι είτε $\bigcup \mathcal{X} = \mathbb{Q}$ ή το σύνολο $\bigcup \mathcal{X}$ είναι κι αυτό τομή Dedekind.
- Παρατηρήστε επίσης ότι η διάζευξη είναι αποκλειστική: δεν μπορούν να συμβαίνουν και τα δύο ταυτόχρονα.*

Οι παρακάτω ασκήσεις είναι (ακόμα πιο) προαιρετικές.

- A. Αν x και y είναι τομές Dedekind, δείξτε ότι και το ακόλουθο σύνολο:

$$\{a +_{\mathbb{Q}} b : a \in x \wedge b \in y\},$$

είναι τομή Dedekind (κάτι που δείχνει ότι η πρόσθεση $x +_{\mathbb{R}} y$ στους πραγματικούς είναι καλώς ορισμένη).

- Β.** Έστω $\mathcal{X} \neq \emptyset$ ένα φραγμένο σύνολο τομών Dedekind (δηλαδή, κάθε στοιχείο του $\mathcal{X}$ είναι τομή Dedekind, και το σύνολο $\mathcal{X}$ έχει άνω φράγμα). Δείξτε ότι $\bigcup \mathcal{X}$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\mathcal{X}$.
- Γ.** Αποδείξτε το Λήμμα της σελίδας 55 από τις σημειώσεις του Σκανδάλη, σχετικά με τις ιδιότητες της συνάρτησης $T : \omega \longrightarrow \omega$.