Θεωρια Συνολων

Χειμερινο Εξαμηνο 2016–2017

3η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία: 9 Δεκεμβρίου 2016

1. Θυμηθείτε ότι την Αρχή του Περιστερώνα (Λήμμα σελ. 65) την αποδείξαμε στο μάθημα για τους φυσικούς αριθμούς. Δηλαδή, δείξαμε ότι για κάθε $n \in \omega$ και για κάθε συνάρτηση $f : n \longrightarrow n$, αν η f είναι 1-1 τότε η f είναι και επί του n.

   Σε αυτήν την άσκηση, δεδομένου του παραπάνω, ο στόχος είναι να δείξετε πως η αντίστοιχη αρχή ισχύει όχι μόνο για τους φυσικούς αριθμούς, αλλά γενικότερα για κάθε πεπερασμένο σύνολο.

   Δηλαδή, χρησιμοποιώντας την Αρχή του Περιστερώνα για τους φυσικούς αριθμούς, δείξτε ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο A και για κάθε $f : A \longrightarrow A$, αν η f είναι 1-1 τότε η f είναι και επί του A.

   Υπόδειξη: θεωρήστε ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο A και μία συνάρτηση $f : A \xrightarrow{\text{1-1}} A$. Στόχος είναι να δείξουμε ότι η f είναι επί του A. Εφόσον το A είναι πεπερασμένο, υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη $\pi : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} n$, για κάποιο $n \in \omega$. Χρησιμοποιώντας τις f και π και την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων, ορίστε μία συνάρτηση $g : n \xrightarrow{\text{1-1}} n$ (και εξηγήστε γιατί η g που ορίσατε είναι 1-1). Από την Αρχή του Περιστερώνα, συμπεράνετε ότι η g είναι επί του n. Από αυτό, καταλήξτε ότι η αρχική f είναι επί του A, που είναι και το ζητούμενο.

2. Δείξτε, με επαγωγή στο m, ότι για κάθε $n, m \in \omega$, ισχύει ότι $n \times m \sim n \cdot m$ (όπου $n \times m$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των δύο φυσικών αριθμών, ενώ $n \cdot m$ είναι απλά το γινόμενο, δηλαδή το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού, των δύο φυσικών αριθμών). Με άλλα λόγια, δείξτε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $n \times m$ δύο φυσικών αριθμών, ως σύνολο, είναι ισοπληθικό με τον φυσικό αριθμό $n \cdot m$.

3. Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο πεπερασμένων συνόλων (δηλαδή, κάθε στοιχείο του A είναι πεπερασμένο σύνολο). Δείξτε ότι το $\bigcup A$ είναι πεπερασμένο.

   Υπόδειξη: επαγωγή στο n, όπου $A \sim n$ (δηλαδή, επαγωγή στην πληθικότητα του A). Παρατηρήστε ότι αν $n = 0$ (ή αν $n = 1$), τότε το συμπέρασμα έπεται άμεσα.

4. Άσκηση 4.2 (σελ. 85), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

   Παρατήρηση: ο Σκανδάλης γράφει $\{0,1\}^A$ για το σύνολο των συναρτήσεων οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού το A και πεδίο τιμών υποσύνολο του $\{0,1\}$. Εμείς στο μάθημα γράφουμε ${}^A\{0,1\}$ για αυτό το σύνολο, δηλαδή:

   $${}^A\{0,1\} = \{f : \ f : A \longrightarrow \{0,1\}\}.$$

   Οπότε, σύμφωνα με το συμβολισμό του μαθήματος, η τελική πρόταση της άσκησης σάς ζητάει να δείξετε ότι, για κάθε σύνολο A, το δυναμοσύνολο του A είναι ισοπληθικό με το σύνολο ${}^A\{0,1\}$.

5. Αυτή είναι ουσιαστικά η Άσκηση 4.10 (σελ. 85), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

   Στο μάθημα ορίσαμε τη συνάρτηση $F : {}^\omega\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής: για κάθε $\alpha \in {}^\omega\{0,1\}$, όπου η άπειρη δυαδική ακολουθία α είναι της μορφής $\alpha = (a_n)_{n\in\omega}$, με $a_n \in \{0,1\}$ για κάθε $n \in \omega$, θέτουμε

   $$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \ .$$

   Αρχικά, εξηγήστε γιατί η συνάρτηση F είναι καλώς ορισμένη. Με άλλα λόγια, εξηγήστε γιατί η παραπάνω άπειρη σειρά συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό, για κάθε $\alpha \in {}^\omega\{0,1\}$.

   Επιπλέον, δείξτε ότι η F είναι μία 1-1 συνάρτηση από το σύνολο ${}^\omega\{0,1\}$ στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

   Παρατήρηση: σε αυτήν την άσκηση, θεωρούμε το κλασικό, γνώριμο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών που χρησιμοποιείται στην ανάλυση, ξεχνώντας στιγμιαία το συνολοθεωρητικό του ανάλογο *που ορίσαμε (μέσω των τομών Dedekind) στο μάθημα. Αυτή η στιγμιαία αλλαγή οπτικής γίνεται για λόγους διευκόλυνσης και δεν παρουσιάζει κανένα ουσιαστικό πρόβλημα.*

Ωστόσο, και για δική σας εξάσκηση αφού λύσετε την άσκηση, σκεφτείτε το πώς θα έπρεπε να οριστεί η συνάρτηση $F : {}^{\omega}\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, αν το σύμβολο $\mathbb{R}$ αναφέρεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών όπως αυτό ορίστηκε στο μάθημα, δηλαδή μέσω τομών Dedekind. Με άλλα λόγια, σκεφτείτε σε ποιά τομή Dedekind πρέπει να στείλουμε το τυχόν στοιχείο $\alpha \in {}^{\omega}\{0,1\}$ ώστε η συνάρτηση F να είναι 1-1. *Προφανώς, η ιδέα είναι ανάλογη.*

6. Έστω πάλι $\mathbb{R}$ το κλασικό, γνώριμο σύνολο των πραγματικών αριθμών που χρησιμοποιείται στην ανάλυση και έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Αποδείξτε τις παρακάτω ισοπληθικότητες:
   - (i) $(0,1) \sim (0,1]$.
   - (ii) $(x,y) \sim (0,1]$.
   - (iii) $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

7. Άσκηση 4.18 (σελ. 86), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

8. **Χωρίς χρήση πληθαρίθμων**, δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A και B, αν $A \sim B$, τότε $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$. Με άλλα λόγια, δεδομένης μίας συνάρτησης $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$, δείξτε ότι υπάρχει (δηλ., ορίστε) μία συνάρτηση $F : \mathcal{P}(A) \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} \mathcal{P}(B)$.

9. (i) Έστω σύνολα A και B ξένα μεταξύ τους (δηλ., $A \cap B = \varnothing$). Δείξτε ότι για κάθε σύνολο C ισχύει ότι:
$$ {}^{(A\cup B)}C \sim {}^{A}C \times {}^{B}C . $$
   (ii) Βρείτε τους πληθαρίθμους των συνόλων: ${}^{10}\omega$, ${}^{\omega}10$, ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ και ${}^{\mathbb{Q}^2}\{2n : n \in \omega\}$.

   Χρησιμοποιώντας πληθική αριθμητική δείξτε τα ακόλουθα:
   - (iii) $|{}^{\omega}\omega| = |{}^{\omega}\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.
   - (iv) $|{}^{\mathbb{R}}\omega| = |{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

10. Δείξτε ότι, για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ και μ, ισχύουν τα ακόλουθα:
    - (i) $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$.
    - (ii) $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$.
    - (iii) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
    - (iv) $\lambda \leqslant \mu \longrightarrow \kappa^{\lambda} \leqslant \kappa^{\mu}$, για $\kappa \neq 0$.
      Τί συμβαίνει αν $\kappa = 0$; Δηλαδή, αν $\kappa = 0$, για ποιές τιμές των λ και μ δεν ισχύει η (iv);

Ως συνήθως, οι παρακάτω ασκήσεις είναι (ακόμα πιο) προαιρετικές.

A. Για οποιαδήποτε σύνολα A, A', B και B', δείξτε ότι αν $A \sim A'$ και $B \sim B'$, τότε ${}^{A}B \sim {}^{A'}B'$.

B. Έστω X το σύνολο των **συνεχών** πραγματικών συναρτήσεων $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, όπου το κλειστό διάστημα $[0,1]$ καθώς και η έννοια της συνέχειας αναφέρονται στο κλασικό, γνώριμο σύνολο των πραγματικών αριθμών της ανάλυσης. Δείξτε ότι $|X| = \mathfrak{c}$.
Υπόδειξη: μία συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ προσδιορίζεται μοναδικά από τις τιμές της στους ρητούς αριθμούς του διαστήματος $[0,1]$.