# Θεωρια Συνολων

Χειμερινο Εξαμηνο 2016–2017

**Ασκήσεις στα Κεφάλαια 5 & 6**

1. Αυτή είναι ουσιαστικά η Άσκηση 5.2 (σελ. 119), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

   Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο και έστω στοιχείο $a \in A$. Αποδείξτε ότι αν το $a$ δεν είναι μέγιστο του $A$, τότε υπάρχει $a^* \in A$ το οποίο είναι το (μοναδικό) αμέσως επόμενο του $a$ (ως προς τη διάταξη $<$).

   *Υπόδειξη: αφού το $a$ δεν είναι μέγιστο, και αφού η διάταξη είναι γραμμική, έπεται πως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$ τέτοιο ώστε $a < x$. Θεωρήστε το σύνολο $B = \{x \in A : a < x\}$. Αυτό είναι προφανώς υποσύνολο του $A$. Επίσης, όπως μόλις είπαμε, είναι και μη κενό, δηλαδή $B \neq \varnothing$. Επομένως, αφού η διάταξη είναι καλή, έστω $a^*$ το ελάχιστο στοιχείο του $B$, δηλαδή, $a^* = \min B$. Δείξτε ότι αυτό το $a^*$ είναι το ζητούμενο, δηλαδή το αμέσως επόμενο στοιχείο του $a$. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι $a < a^*$ και ότι, για κάθε $x \in A$, αν $a < x$ τότε $a^* \leqslant x$.*

2. Αυτή είναι ουσιαστικά η Άσκηση 5.4 (σελ. 119), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

   Έστω $\langle A, <_A \rangle$ και $\langle B, <_B \rangle$ γραμμικά διατεταγμένα σύνολα τα οποία είναι όμοια. Με άλλα λόγια, υπάρχει $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$ που είναι ισομορφισμός, δηλαδή, για κάθε $x, y \in A$, ισχύει:

$$x <_A y \longleftrightarrow f(x) <_B f(y)\,.$$

   Αποδείξτε ότι αν το $\langle A, <_A \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο τότε και το $\langle B, <_B \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο.

   *Υπόδειξη: υποθέστε ότι υπάρχει $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$ ισομορφισμός και ότι το $\langle A, <_A \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο. Το μόνο που έχετε να δείξετε είναι ότι αν $C \subseteq B$ είναι υποσύνολο του $B$ με $C \neq \varnothing$, τότε το $C$ έχει ελάχιστο στοιχείο (ως προς $<_B$). Δηλαδή, υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $b = \min C$. Για αυτό, δεδομένου ενός τέτοιου μη κενού $C \subseteq B$, ορίστε ένα αντίστοιχο $D \subseteq A$ μη κενό υποσύνολο του $A$. Αφού το $\langle A, <_A \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο, υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $a = \min D$ (ως προς $<_A$). Δείξτε τώρα πώς από αυτό το $a = \min D$ μπορείτε να βρείτε το ζητούμενο $b \in B$ τέτοιο ώστε $b = \min C$. Η Άσκηση 9 της 1ης Σειράς Ασκήσεων (δηλαδή, η Άσκηση 2.27, σελ. 42, από τις σημειώσεις του Σκανδάλη) μπορεί ίσως να σας φανεί χρήσιμη.*

3. Αυτή είναι ουσιαστικά η Άσκηση 5.5 (ii) (σελ. 119), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

   Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο και έστω $B \subsetneq A$ ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle A, < \rangle$. Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο $a \in A$ τέτοιο ώστε $B = O_<(a)$, όπου $O_<(a) = \{x \in A : x < a\}$.

   *Υπόδειξη: αφού το $B$ είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle A, < \rangle$, έπεται πως $A \backslash B \neq \varnothing$. Επομένως, το $A \backslash B$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $a = \min(A \backslash B)$. Δείξτε ότι για αυτό το συγκεκριμένο στοιχείο $a \in A$ ισχύει ότι $B = O_<(a)$. Για αυτό, δείξτε ότι $B \subseteq O_<(a)$ και ότι $O_<(a) \subseteq B$. Για τον πρώτο εγκλεισμό, χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι το $B$ είναι αρχικό τμήμα (δηλαδή, κλειστό προς τα κάτω). Για τον δεύτερο εγκλεισμό, χρησιμοποιήστε το ότι το στοιχείο $a$ είναι το ελάχιστο του $A \backslash B$.*

4. Αυτή η άσκηση ουσιαστικά σάς ζητάει να αποδείξετε το μέρος (iii) της Πρότασης 5 (σελ. 92) των σημειώσεων του Σκανδάλη.

   Έστω $\langle A, <_A \rangle$, $\langle B, <_B \rangle$ και $\langle C, <_C \rangle$ καλά διατεταγμένα σύνολα. Δείξτε ότι αν το $\langle A, <_A \rangle$ είναι όμοιο με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle B, <_B \rangle$, και το $\langle B, <_B \rangle$ είναι όμοιο με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle C, <_C \rangle$, τότε και το $\langle A, <_A \rangle$ είναι όμοιο με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle C, <_C \rangle$. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι η σχέση $\prec$ στα καλά διατεταγμένα σύνολα (όπως ορίστηκε στο μάθημα – δείτε ορισμό στη σελ. 92 των σημειώσεων του Σκανδάλη) είναι σχέση μεταβατική, δηλαδή:

$$\langle A, <_A \rangle \prec \langle B, <_B \rangle \wedge \langle B, <_B \rangle \prec \langle C, <_C \rangle \longrightarrow \langle A, <_A \rangle \prec \langle C, <_C \rangle\,.$$

   *Υπόδειξη: υποθέστε ότι $\langle A, <_A \rangle \prec \langle B, <_B \rangle$ και $\langle B, <_B \rangle \prec \langle C, <_C \rangle$. Από το πρώτο, έπεται πως υπάρχει κάποιο $x \in B$ και κάποια συνάρτηση $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} O_{<_B}(x)$ η οποία είναι ισομορφισμός. Ομοίως,* *από το δεύτερο, έπεται πως υπάρχει κάποιο $y \in C$ και κάποια συνάρτηση $f : B \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} O_{<_C}(y)$ η οποία είναι ισομορφισμός. Ακολουθήστε τη στρατηγική της απόδειξης του μέρους $(ii)$ της Πρότασης 5 (όπως την κάναμε στο μάθημα – κάντε και ένα αντίστοιχο βοηθητικό σχήμα) για να δείξετε ότι μία κατάλληλη σύνθεση της $f$ με κάποιον περιορισμό της $g$ δίνει ισομορφισμό από το $\langle A, <_A\rangle$ σε ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle C, <_C\rangle$, που είναι και το ζητούμενο.*

5. Αυτή είναι ουσιαστικά η Άσκηση 5.11 (σελ. 120), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

Θεωρήστε το σύνολο $\omega \times \{0,1\}$, το οποίο είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών με πρώτη συντεταγμένη κάποιον φυσικό αριθμό και δεύτερη συντεταγμένη 0 ή 1. Δηλαδή:

$$\omega \times \{0,1\} = \{\langle m, 0\rangle : m \in \omega\} \cup \{\langle n, 1\rangle : n \in \omega\}.$$

Στο σύνολο αυτό ορίζουμε την εξής σχέση διάταξης $\prec$. Για κάθε $m, n \in \omega$ και κάθε $i, j \in \{0,1\}$:

$$\langle m, i\rangle \prec \langle n, j\rangle \longleftrightarrow i < j \vee (i = j \wedge m < n),$$

όπου το $i < j$ και το $m < n$ στο δεξί μέλος της παραπάνω ισοδυναμίας αναφέρονται στη συνήθη διάταξη των φυσικών αριθμών. Με άλλα λόγια, η σχέση $\prec$ ορίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη ιδέα. Όλα τα διατεταγμένα ζεύγη που έχουν 0 στη δεύτερη συντεταγμένη (τα ορίζουμε να) είναι $\prec$-μικρότερα από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη που έχουν 1 στη δεύτερη συντεταγμένη. Επιπλέον, αν δύο διατεταγμένα ζεύγη έχουν ίδια δεύτερη συντεταγμένη, δηλαδή είναι της μορφής $\langle m, i\rangle$ και $\langle n, i\rangle$ (όπου $m, n \in \omega$ και $i \in \{0,1\}$), τότε τα διατάσσουμε σύμφωνα με τη συνήθη διάταξη των πρώτων συντεταγμένων τους (που είναι φυσικοί αριθμοί). Τελικά, η διάταξη $\prec$ μοιάζει κάπως έτσι:

$$\langle 0,0\rangle \prec \langle 1,0\rangle \prec \langle 2,0\rangle \prec \langle 3,0\rangle \prec \ldots \prec \langle 0,1\rangle \prec \langle 1,1\rangle \prec \langle 2,1\rangle \prec \langle 3,1\rangle \prec \ldots$$

Δείξτε ότι η $\prec$ είναι καλή διάταξη του $\omega \times \{0,1\}$. Επιπλέον, για κάθε $n \in \omega$, βρείτε (δηλ., περιγράψτε πλήρως) το γνήσιο αρχικό τμήμα $O_\prec(\langle n, 1\rangle)$.

*Υπόδειξη: για δική σας εξάσκηση, επιβεβαιώστε αρχικά ότι η $\prec$ είναι όντως γνήσια γραμμική διάταξη στο σύνολο $\omega \times \{0,1\}$. Κατόπιν, για να δείξετε ότι είναι και καλή διάταξη, θεωρήστε ένα $B \subseteq \omega \times \{0,1\}$ με $B \neq \varnothing$. Θεωρήστε τα σύνολα $B_0 = \{m \in \omega : \langle m, 0\rangle \in B\}$ και $B_1 = \{n \in \omega : \langle n, 1\rangle \in B\}$. Με άλλα λόγια, π.χ., το $B_0$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών που εμφανίζονται ως πρώτες συντεταγμένες διατεταγμένων ζευγών από το $B$ με δεύτερη συντεταγμένη ίση με 0. Παρατηρήστε ότι $B_0, B_1 \subseteq \omega$ και ότι δεν μπορεί να είναι και τα δύο κενά, καθώς τότε το $B$ θα ήταν κι αυτό κενό. Επομένως, τουλάχιστον ένα εκ των $B_0, B_1$ είναι μη κενό. Αν το $B_0$ δεν είναι κενό, τότε θεωρήστε το ελάχιστο στοιχείο του, έστω $m^* \in \omega$, και δείξτε ότι το $\langle m^*, 0\rangle$ είναι το ελάχιστο του $B$. Αν το $B_0$ είναι κενό, τότε το $B_1$ δεν είναι κενό, οπότε θεωρήστε το ελάχιστο στοιχείο του $B_1$, έστω $n^* \in \omega$, και δείξτε ότι το $\langle n^*, 1\rangle$ είναι το ελάχιστο του $B$.*

*Τέλος, για κάθε $n \in \omega$, περιγράψτε πλήρως, δηλαδή, καταγράψτε επακριβώς, το σύνολο $O_\prec(\langle n, 1\rangle)$.*

6. Σε αυτήν την άσκηση, σάς ζητείται να βρείτε παραδείγματα τα οποία να δείχνουν ότι η υπόθεση της καλής διάταξης είναι απαραίτητη τόσο στην Πρόταση 2 (σελ. 90) όσο και στην Πρόταση 3 (σελ. 91) των σημειώσεων του Σκανδάλη.

   $(i)$ Βρείτε παράδειγμα μη καλά διατεταγμένου συνόλου $\langle A, <_A\rangle$ και γνησίως αύξουσας συνάρτησης $f : A \longrightarrow A$, έτσι ώστε για κάποιο $x \in A$ να ισχύει $f(x) < x$.

   $(ii)$ Βρείτε παραδείγματα μη καλά διατεταγμένων συνόλων $\langle A, <_A\rangle$ και $\langle B, <_B\rangle$ τα οποία να είναι όμοια αλλά να υπάρχουν τουλάχιστον δύο (διαφορετικοί) ισομορφισμοί της μορφής $f : A \longrightarrow B$.

*Υπόδειξη: το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, με τη συνήθη διάταξη, είναι βασικό παράδειγμα μη καλά διατεταγμένου συνόλου. Ωστόσο, για δική σας εξάσκηση, προσπαθήστε να βρείτε και άλλα παραδείγματα.*

7. Έστω $\alpha$ διατακτικός αριθμός. Θεωρήστε το επόμενο σύνολο αυτού, δηλαδή το σύνολο $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$.

   $(i)$ Δείξτε ότι το $\alpha^+$ είναι κι αυτό διατακτικός αριθμός.

   $(ii)$ Δείξτε ότι το $\alpha^+$ είναι ο αμέσως επόμενος διατακτικός αριθμός του $\alpha$. Δηλαδή, $\alpha < \alpha^+$ και δεν υπάρχει διατακτικός $\beta$ τέτοιος ώστε $\alpha < \beta < \alpha^+$.

*Υπόδειξη: θυμηθείτε ότι στους διατακτικούς αριθμούς, ακριβώς όπως κάναμε και στους φυσικούς αριθμούς, ταυτίζουμε (εξ ορισμού) τη σχέση διάταξης $<$ με τη σχέση $\in$ του ανήκειν.*

8. Έστω $A$ ένα σύνολο διατακτικών αριθμών (δηλαδή, κάθε $\alpha \in A$ είναι διατακτικός).
   $(i)$ Δείξτε ότι και το $\bigcup A$ είναι σύνολο διατακτικών αριθμών (δηλαδή, κάθε $x \in \bigcup A$ είναι επίσης διατακτικός).
   $(ii)$ Δείξτε ότι το $\bigcup A$ είναι μεταβατικό σύνολο.
   $(iii)$ Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω ερωτήματα και το Πόρισμα 2 της σελ. 99 των σημειώσεων, συμπεράνετε ότι το $\bigcup A$ είναι κι αυτό διατακτικός αριθμός.

   *Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τους βασικούς ορισμούς της ένωσης συνόλου, του μεταβατικού συνόλου, και του διατακτικού αριθμού. Επίσης, χρησιμοποιήστε τις βασικές ιδιότητες των διατακτικών αριθμών που είδαμε στο μάθημα, π.χ., ότι κάθε στοιχείο διατακτικού αριθμού είναι επίσης διατακτικός αριθμός.*

   *Σημείωση: για κάθε $A$ σύνολο διατακτικών αριθμών, τον διατακτικό αριθμό $\bigcup A$ τον συμβολίσαμε, ισοδύναμα, και με $\sup A$ στο μάθημα. Θυμηθείτε πως αυτός είναι ο ελάχιστος διατακτικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος ή ίσος από όλα τα στοιχεία του $A$.*

9. Θυμηθείτε τις δύο διατυπώσεις του Αξιώματος της Επιλογής που είδαμε στο μάθημα:

AC : Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων, δηλαδή, $I \neq \varnothing$ και $A_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in I$, τότε ισχύει ότι $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

*Υπενθύμιση: το σύνολο $\prod_{i\in I} A_i$, το οποίο λέγεται γενικευμένο καρτεσιανό γινόμενο της οικογένειας, έχει για στοιχεία όλες τις συναρτήσεις επιλογής για την οικογένεια. Δηλαδή:*

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση} \wedge \mathrm{dom}(f) = I \wedge (\forall\, i \in I)(f(i) \in A_i)\}\,.$$

*Με άλλα λόγια, το AC μάς λέει ότι για κάθε μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων υπάρχει τουλάχιστον μία συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια, δηλαδή μία συνάρτηση η οποία «επιλέγει» ένα στοιχείο από κάθε σύνολο της οικογένειας.*

---

AC$^*$ : Για κάθε σύνολο $B$, υπάρχει συνάρτηση $f : \mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow B$ τέτοια ώστε, για κάθε $X \in \mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}$, ισχύει ότι $f(X) \in X$.

*Σημείωση: μία τέτοια συνάρτηση, η οποία «επιλέγει» ένα στοιχείο από κάθε μη κενό υποσύνολο του $B$, λέγεται συνάρτηση επιλογής για το $B$. Με άλλα λόγια, το AC$^*$ μάς λέει ότι για κάθε σύνολο υπάρχει τουλάχιστον μία συνάρτηση επιλογής για το σύνολο. Παρατηρήστε ότι στην ειδική περίπτωση που $B = \varnothing$, η κενή συνάρτηση $f = \varnothing$ είναι συνάρτηση επιλογής για το $B$.*

---

Δεδομένων των παραπάνω, σε αυτήν την άσκηση σάς ζητείται να δείξετε ότι οι δύο διατυπώσεις είναι ισοδύναμες, δηλαδή ότι AC $\longleftrightarrow$ AC$^*$.

$(i)$ Δείξτε ότι AC $\longrightarrow$ AC$^*$.
*Υπόδειξη: υποθέστε το AC και θεωρήστε ένα οποιοδήποτε (μη κενό) σύνολο $B$ (όπως είπαμε παραπάνω, αν $B = \varnothing$, τότε η κενή συνάρτηση $f = \varnothing$ είναι συνάρτηση επιλογής). Σκοπός είναι να βρείτε μία συνάρτηση επιλογής για το σύνολο $B$. Θεωρήστε την ακόλουθη συνάρτηση:*

$$F = \{\langle A, A\rangle : A \subseteq B \wedge A \neq \varnothing\}\,.$$

*Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $F$, η οποία έχει ως πεδίο ορισμού (αλλά και πεδίο τιμών) το $\mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}$ και η οποία στέλνει κάθε μη κενό υποσύνολο του $B$ στον εαυτό του, μπορεί να θεωρηθεί ως ορισμός οικογένειας συνόλων: συγκεκριμένα, της οικογένειας όλων των μη κενών υποσυνόλων του $B$ με δείκτες τους εαυτούς τους. Δηλαδή, θεωρώντας ως σύνολο δεικτών το*

*$I = \mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}$, έχουμε πως η $F$ είναι η οικογένεια συνόλων $(A_A)_{A\in\mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}}$, όπου $A_A = A$ για κάθε $A \in \mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}$. Σε περίπτωση που αυτά δεν τα βρίσκετε αρκετά ξεκάθαρα, σάς προτείνω να ξανακοιτάξετε επισταμένα αυτά που έχουμε κάνει στο μάθημα σχετικά με οικογένειες συνόλων και το πώς αυτές ορίζονται μέσω συναρτήσεων (μερικές σχετικές λεπτομέρειες βρίσκονται και στην υπόδειξη της Άσκησης 11 παρακάτω). Ακόμα και όταν τα παραπάνω σάς γίνουν ξεκάθαρα, μπορεί να σάς φαίνεται πολύπλοκος και ίσως αχρείαστος ο φορμαλισμός που εισαγάγαμε. Ωστόσο, η εισαγωγή αυτής της οικογένειας $(A_A)_{A\in\mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}}$ που μόλις ορίσαμε είναι ακριβώς η προεργασία που χρειαζόμαστε για να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεσή μας, δηλαδή το AC. Η οικογένεια $F$, δηλαδή η $(A_A)_{A\in\mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}}$, είναι μία μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων. Επομένως, από AC, έπεται πως υπάρχει συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση της μορφής:*

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{A\in I} A_A\,,$$

*τέτοια ώστε, για κάθε $A \in I$, να ισχύει $f(A) \in A_A$. Χρησιμοποιώντας το ότι, για την συγκεκριμένη οικογένεια, έχουμε ότι $I = \mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}$ και ότι $A_A = A$ για κάθε $A \in I$, δείξτε ότι αυτή η $f$ είναι συνάρτηση επιλογής για το αρχικό σύνολο $B$, που είναι και το ζητούμενο.*

$(ii)$ Δείξτε ότι $\mathrm{AC}^* \longrightarrow \mathrm{AC}$.

*Υπόδειξη: υποθέστε το AC* και θεωρήστε μια οποιαδήποτε οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$, η οποία είναι μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων (δηλαδή, $I \neq \varnothing$ και $A_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in I$). Σκοπός είναι να βρείτε μία συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια. Θεωρήστε το σύνολο $B = \bigcup_{i\in I} A_i$. Από AC*, υπάρχει συνάρτηση επιλογής για το $B$. Δηλαδή, υπάρχει μία $f : \mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow B$ τέτοια ώστε, για κάθε $X \in \mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}$, ισχύει ότι $f(X) \in X$. Δεδομένης αυτής της $f$, ορίστε την ακόλουθη συνάρτηση:*

$$g = \{\langle i, f(A_i)\rangle : i \in I\}\,.$$

*Δείξτε ότι η $g$ είναι συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$, που είναι και το ζητούμενο.*

10. Δείξτε ότι το Λήμμα του Zorn συνεπάγεται το Αξίωμα της Επιλογής. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι ισχύει η συνεπαγωγή $\mathrm{ZL} \longrightarrow \mathrm{AC}$.

*Υπόδειξη: υποθέστε το Λήμμα του Zorn και θεωρήστε μια οποιαδήποτε οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$, η οποία είναι μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων (δηλαδή, $I \neq \varnothing$ και $A_i \neq \varnothing$ για κάθε $i \in I$). Σκοπός είναι να βρείτε μία συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια. Θεωρήστε το ακόλουθο σύνολο των μερικών συναρτήσεων επιλογής για την οικογένεια:*

$$\mathcal{A} = \{f : \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση} \wedge \mathrm{dom}(f) \subseteq I \wedge (\forall\, i \in \mathrm{dom}(f))(f(i) \in A_i)\}\,.$$

*Παρατηρήστε ότι μία τέτοια μερική συνάρτηση επιλογής έχει $\mathrm{dom}(f) \subseteq I$, δηλαδή ενδεχομένως δεν είναι ορισμένη σε όλο το σύνολο δεικτών $I$, αλλά μόνο σε κάποιο γνήσιο υποσύνολό του (και γι' αυτό λέγεται «μερική», σε αντιδιαστολή με το «ολική»). Ωστόσο, αν και το πεδίο ορισμού μία τέτοιας $f$ ενδεχομένως δεν είναι όλο το $I$, η $f$ ικανοποιεί τη βασική συνθήκη που χαρακτηρίζει μία συνάρτηση επιλογής: δηλαδή, για κάθε $i \in \mathrm{dom}(f)$, έχουμε ότι $f(i) \in A_i$. Με άλλα λόγια, μία μερική συνάρτηση επιλογής μπορεί να θεωρηθεί ως «προσέγγιση» της («ολικής») συνάρτησης επιλογής που ψάχνουμε για την οικογένεια. Άρα, υπό αυτό το πρίσμα, το σύνολο $\mathcal{A}$ που ορίσαμε παραπάνω είναι το σύνολο όλων αυτών των «προσεγγίσεων» της συνάρτησης επιλογής που ψάχνουμε.*

*Στο σύνολο $\mathcal{A}$, θεωρούμε τη σχέση $\subseteq$ του υποσυνόλου, η οποία είναι προφανώς μία μερική διάταξη στο $\mathcal{A}$. Με αυτά τα δεδομένα, δείξτε ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\langle \mathcal{A}, \subseteq\rangle$ ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn, δηλαδή, ότι κάθε αλυσίδα $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ έχει άνω φράγμα. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι αν $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο (ως προς $\subseteq$) υποσύνολο του $\mathcal{A}$ (δηλαδή, για κάθε $s, t \in \mathcal{C}$ έχουμε ότι είτε $s \subseteq t$ ή $t \subseteq s$), υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $s \subseteq f$ για κάθε $s \in \mathcal{C}$. Για να το δείξετε αυτό, δεδομένης μίας αλυσίδας $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, θέστε $f = \bigcup \mathcal{C}$ και δείξτε ότι, πρώτον, $f \in \mathcal{A}$ και, δεύτερον, $s \subseteq f$ για κάθε $s \in \mathcal{C}$. Σε αυτό το σημείο, θυμηθείτε την Άσκηση 5 της 1ης Σειράς Ασκήσεων (δηλαδή, την Άσκηση 2.14, σελ. 41, από τις σημειώσεις του Σκανδάλη).*

*Έχοντας δείξει ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\langle \mathcal{A}, \subseteq\rangle$ ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος του Zorn, το Λήμμα του Zorn σάς δίνει μία $f^* \in \mathcal{A}$ η οποία είναι ένα μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{A}$ (ως προς $\subseteq$). Δείξτε ότι $\mathrm{dom}(f^*) = I$. Για να το δείξετε, υποθέστε, προς άτοπο, ότι $\mathrm{dom}(f^*) \subsetneq I$*

*και δείξτε ότι τότε μπορούμε να επεκτείνουμε (γνήσια) την $f^*$ σε μία $F$ (δηλ., $f^* \subsetneq F$), η οποία $F$ επίσης να ανήκει στο $\mathcal{A}$· αυτό όμως αντιβαίνει στο γεγονός ότι η $f^*$ είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{A}$, ως προς $\subseteq$. Συμπεράνετε λοιπόν ότι όντως $\mathrm{dom}(f^*) = I$, δηλαδή ότι αυτή η συγκεκριμένη $f^*$ είναι συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$, που είναι και το ζητούμενο.*

*Παρατήρηση: για ακόμα μία φορά, σημειώνεται η γενική ιδέα μίας τυπικής χρήσης του Λήμματος του Zorn. Θεωρούμε ένα σύνολο «προσεγγίσεων» του αντικειμένου που θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει (εδώ, μίας συνάρτησης επιλογής για την οικογένεια). Σε αυτό το σύνολο των «προσεγγίσεων» ορίζουμε μία κατάλληλη σχέση μερικής διάταξης. Δείχνουμε ότι για αυτή τη μερική διάταξη ικανοποιείται η υπόθεση του Λήμματος του Zorn και, άρα, υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο ως προς τη μερική διάταξη. Τέλος, δείχνουμε ότι αυτό το μεγιστικό στοιχείο είναι το επιθυμητό αντικείμενο του οποίου την ύπαρξη θέλαμε.*

11. Σε αυτήν την άσκηση σάς ζητείται να δείξετε, τυπικά και αυστηρά, με χρήση του Αξιώματος της Επιλογής, ότι η αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι αν $(A_n)_{n \in \omega}$ είναι μία δεδομένη αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων με $A_n \cap A_m = \varnothing$ για κάθε $n, m \in \omega$ με $n \neq m$, και τέτοια ώστε $\omega \sim A_n$ για κάθε $n \in \omega$, τότε $\omega \sim \bigcup_{n \in \omega} A_n$.

---

Για να καταλάβετε καλύτερα το πώς και γιατί υπεισέρχεται το Αξίωμα της Επιλογής στην απόδειξη, δίνουμε αρχικά μία όχι και τόσο αυστηρή απόδειξη, όπως ίσως την έχετε δει αλλού.

**«Απόδειξη»:** Έστω $(A_n)_{n \in \omega}$ μία τέτοια οικογένεια. Για κάθε $n \in \omega$, αφού το $A_n$ είναι αριθμήσιμο, υπάρχει συνάρτηση $f_n : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} A_n$. Δεδομένων αυτών των συναρτήσεων $f_n$, ορίζουμε την συνάρτηση $f^* : \omega \times \omega \longrightarrow \bigcup_{n \in \omega} A_n$ ως εξής. Για κάθε $n, m \in \omega$, θέτουμε:

$$f^*(\langle n, m \rangle) = f_n(m)\,.$$

Χρησιμοποιώντας το ότι τα σύνολα της οικογένειας είναι ξένα ανά δύο και το ότι κάθε $f_n$ είναι 1-1, είναι εύκολο να δείτε ότι και η $f^*$ είναι 1-1. Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας το ότι κάθε $f_n$ είναι επί, είναι εύκολο να δείτε ότι και η $f^*$ είναι επί. Επομένως, η συνάρτηση $f^*$ φανερώνει την ισοπληθικότητα $\omega \times \omega \sim \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Όμως, γνωρίζουμε ήδη ότι το σύνολο $\omega \times \omega$ είναι ισοπληθικό με το $\omega$, δηλαδή αριθμήσιμο, από το οποίο έπεται ότι και το $\bigcup_{n \in \omega} A_n$ είναι αριθμήσιμο. □

---

Η χρήση του Αξιώματος της Επιλογής στην παραπάνω απόδειξη ενδεχομένως δεν είναι εμφανής σε πρώτη ανάγνωση. Έγινε όμως ακριβώς στο σημείο στο οποίο «επιλέξαμε», ομοιόμορφα και για κάθε $n \in \omega$, μία συνάρτηση $f_n$ που φανερώνει την αριθμησιμότητα του συνόλου $A_n$. Δηλαδή, παρά το ότι ξέρουμε, εξ υποθέσεως, ότι κάθε $A_n$ είναι αριθμήσιμο, χωρίς τη χρήση του Αξιώματος της Επιλογής δεν έχουμε τρόπο, γενικά, να εγγυηθούμε την ύπαρξη μίας συνάρτησης (ας την πούμε $\mathcal{C}$) της μορφής:

$$n \overset{\mathcal{C}}{\mapsto} f_n\,,$$

η οποία σε κάθε $n \in \omega$ να αντιστοιχεί το $\mathcal{C}(n) = f_n$. Με άλλα λόγια, χωρίς τη χρήση του Αξιώματος της Επιλογής δεν έχουμε τρόπο, γενικά, να εγγυηθούμε την ύπαρξη μία τέτοιας συνάρτησης $\mathcal{C}$ που σε κάθε $n \in \omega$ αντιστοιχεί (δηλ., «επιλέγει») μία συγκεκριμένη συνάρτηση $f_n$ που φανερώνει την αριθμησιμότητα του συνόλου $A_n$. Ωστόσο, παρατηρήστε ότι χρειαστήκαμε αυτήν τη συνάρτηση $n \mapsto f_n$ (δηλ., τη $\mathcal{C}$) όταν ορίσαμε την $f^*$ που μάς φανέρωσε την κρίσιμη ισοπληθικότητα. Κατά τα άλλα, η υπόθεση ότι κάθε $A_n$ είναι αριθμήσιμο, από μόνη της, το μόνο που μάς εγγυάται είναι ότι για κάθε $n \in \omega$, το σύνολο $\{f : \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση} \wedge f : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} A_n\}$ είναι μη κενό. Το Αξίωμα της Επιλογής είναι εκείνο που, σε αυτό το κρίσιμο βήμα, «επιλέγει» ομοιόμορφα από κάθε τέτοιο μη κενό σύνολο μία $f_n$, και μάς δίνει τελικά τη δυνατότητα να ορίσουμε την $f^*$.

Από εκείνο το σημείο και μετά η απόδειξη έχει σχεδόν τελειώσει, αφού το μόνο που μένει είναι να ελέγξουμε ότι η $f^*$ είναι 1-1 και επί, και να θυμηθούμε την ισοπληθικότητα $\omega \times \omega \sim \omega$ που είχαμε δείξει στο μάθημα.

Χρησιμοποιώντας ακριβώς την ίδια ιδέα με την παραπάνω απόδειξη, αποδείξτε τώρα αυστηρά και τυπικά την πρόταση, ακολουθώντας την παρακάτω υπόδειξη.

*Υπόδειξη: θεωρήστε αρχικά πως η δεδομένη οικογένεια $(A_n)_{n\in\omega}$ ορίζεται από τη συνάρτηση*

$$F : \omega \longrightarrow \{A_n : n \in \omega\}\,,$$

*όπου, για κάθε $n \in \omega$, έχουμε $F(n) = A_n$. Δηλαδή, η συνάρτηση $F$ καθώς το σύνολο $\{A_n : n \in \omega\}$ είναι δεδομένα, και ορίζουν ουσιαστικά την οικογένεια $(A_n)_{n\in\omega}$.*

*Η υπόθεση πως κάθε σύνολο της οικογένειας είναι αριθμήσιμο, σημαίνει πως για κάθε $n \in \omega$ υπάρχει μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $\omega$ στο $A_n$, δηλαδή από το $\omega$ στο $F(n)$. Ορίζουμε τώρα την οικογένεια $(B_n)_{n\in\omega}$, μέσω της συνάρτησης $G$ που ορίζεται ως εξής. Για κάθε $n \in \omega$, θέτουμε:*

$$G(n) = \{f : \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση} \wedge f : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} F(n)\}\,.$$

*Με άλλα λόγια, για κάθε $n \in \omega$, το $G(n)$ είναι το σύνολο που περιέχει όλες τις 1-1 και επί συναρτήσεις που φανερώνουν την αριθμησιμότητα του $F(n)$, δηλαδή του $A_n$. Αν θέσουμε $B_n = G(n)$, για κάθε $n \in \omega$, τότε η συνάρτηση $G$ ορίζει την οικογένεια $(B_n)_{n\in\omega}$, δηλαδή:*

$$G : \omega \longrightarrow \{B_n : n \in \omega\}\,,$$

*όπου, για κάθε $n \in \omega$, έχουμε $G(n) = B_n$ και*

$$B_n = \{f : \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση} \wedge f : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} A_n\}\,.$$

*Παρατηρήστε ότι, μέχρι στιγμής, ο ορισμός της $G$, δηλαδή της οικογένειας $(B_n)_{n\in\omega}$, χρησιμοποιεί μόνο τη δεδομένη συνάρτηση $F$. Με άλλα λόγια, ακόμα δεν έχουμε κάνει χρήση του Αξιώματος της Επιλογής.*

*Τώρα, παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \in \omega$, το σύνολο $B_n$ είναι μη κενό, δηλαδή η οικογένεια $(B_n)_{n\in\omega}$ είναι μία μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων. Επομένως, από το Αξίωμα της Επιλογής (στη μορφή AC), έπεται πως υπάρχει μία συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $(B_n)_{n\in\omega}$, δηλαδή, υπάρχει μία συνάρτηση:*

$$\mathcal{C} : \omega \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} B_n\,,$$

*τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \omega$, έχουμε ότι $\mathcal{C}(n) \in B_n$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \omega$, έχουμε ότι το $\mathcal{C}(n)$ είναι μία συνάρτηση της μορφής $\mathcal{C}(n) : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} A_n$, δηλαδή μία συνάρτηση που φανερώνει την αριθμησιμότητα του συνόλου $A_n$ (δηλ., αυτή που προηγούμενα ονομάσαμε $f_n$). Η χρήση του Αξιώματος της Επιλογής έχει τελειώσει. Με αυτά τα δεδομένα, και ειδικότερα δεδομένης αυτής της συνάρτησης επιλογής $\mathcal{C}$, μπορούμε τώρα να ορίσουμε, ακριβώς όπως προηγουμένως, τη συνάρτηση $f^* : \omega \times \omega \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Για κάθε $n, m \in \omega$, θέτουμε:*

$$f^*(\langle n, m\rangle) = (\mathcal{C}(n))(m)\,.$$

*Όπως και πριν, ελέγχουμε ότι η $f^*$ είναι 1-1 και επί, το οποίο, μαζί με την ήδη γνωστή αριθμησιμότητα του συνόλου $\omega \times \omega$, δείχνει ότι και το $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ είναι αριθμήσιμο, που είναι και το ζητούμενο.*