Θεωρια Συνολων

Χειμερινο Εξαμηνο 2016–2017

1η Σειρά Ασκήσεων

Λυσεις

1. Άσκηση 1.9 (σελ. 17), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

   Λύση.

   Έστω A, B δεδομένα σύνολα. Θα χρησιμοποιήσουμε τα αξιώματα αλλά αναφερόμενοι, αποκλειστικά, είτε στα δεδομένα σύνολα A και B ή σε σύνολα που προκύπτουν (υπάρχουν) από αυτά μέσω των αξιωμάτων (π.χ., $\mathcal{P}(A)$, $\{A, B\}$, $\bigcup B$, $\mathcal{P}(\{\bigcup A, B\})$, και λοιπά).

   Για να δείξουμε ότι υπάρχει το σύνολο $\{A \cap x : x \in B\}$, σκεφτόμαστε ως εξής. Τα στοιχεία του επιθυμητού συνόλου είναι της μορφής $A \cap x$, όπου x στοιχείο του συνόλου B. Αυτό σημαίνει πως κάθε στοιχείο $A \cap x$ του επιθυμητού συνόλου εγκλείεται ως εξής: $A \cap x \subseteq A$· δηλαδή $A \cap x \in \mathcal{P}(A)$. Άρα, για το επιθυμητό σύνολο, μπορούμε να διαχωρίσουμε στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ (το οποίο προφανώς υπάρχει, μιας που το A είναι δεδομένο). Ο τύπος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός που λέει πως "το σύνολο z είναι της μορφής $A \cap x$, για κάποιο $x \in B$", δηλαδή ο τύπος:

   $$\Phi(z) \ : \ \exists x \, (x \in B \ \wedge \ \forall y \, (y \in z \longleftrightarrow (y \in A \ \wedge \ y \in x))) \, ,$$

   ο οποίος λέει ακριβώς ότι $z = A \cap x$, για κάποιο $x \in B$.

   Έτσι, από το αξιωματικό σχήμα του διαχωρισμού, υπάρχει το σύνολο

   $$\{z \in \mathcal{P}(A) : \Phi(z)\} \, ,$$

   το οποίο είναι ακριβώς το σύνολο που θέλουμε, δηλαδή το $\{A \cap x : x \in B\}$.

   Αντίστοιχα, για να δείξουμε ότι υπάρχει το σύνολο $\{A \cup x : x \in B\}$, παρατηρούμε πως, για κάθε $x \in B$, έχουμε ότι $A \cup x \subseteq A \cup \bigcup B$ και άρα $A \cup x \in \mathcal{P}(A \cup \bigcup B)$, δηλαδή θα διαχωρίσουμε στο σύνολο $\mathcal{P}(A \cup \bigcup B)$.

   Αρχικά δείχνουμε πως αυτό το σύνολο, στο οποίο πρόκειται να διαχωρίσουμε, υπάρχει: μιας που το B είναι δεδομένο, υπάρχει το $\bigcup B$ (από αξίωμα ένωσης) και τότε, μιας που και το A είναι δεδομένο, υπάρχει και το $A \cup \bigcup B$ (από αξιώματα ζεύγους και ένωσης). Δεδομένου αυτού, από αξίωμα δυναμοσυνόλου, υπάρχει και το $\mathcal{P}(A \cup \bigcup B)$.

   Για να εφαρμόσουμε διαχωρισμό λοιπόν, αυτή τη φορά επιλέγουμε τον ακόλουθο τύπο:

   $$\Psi(z) \ : \ \exists x \, (x \in B \ \wedge \ \forall y \, (y \in z \longleftrightarrow (y \in A \ \vee \ y \in x))) \, ,$$

   ο οποίος λέει ακριβώς ότι $z = A \cup x$, για κάποιο $x \in B$.

   Έτσι, από το αξιωματικό σχήμα του διαχωρισμού, υπάρχει το σύνολο

   $$\{z \in \mathcal{P}(A \cup \bigcup B) : \Psi(z)\} \, ,$$

   το οποίο είναι ακριβώς το σύνολο που θέλουμε, δηλαδή το $\{A \cup x : x \in B\}$.

i) Για να δείξουμε την επιθυμητή ισότητα, δείχνουμε πως $A \cap \bigcup B \subseteq \bigcup\{A \cap x : x \in B\}$ και πως $\bigcup\{A \cap x : x \in B\} \subseteq A \cap \bigcup B$.

Για τον πρώτο εγκλεισμό, έστω $a \in A \cap \bigcup B$, δηλάδη $a \in A$ και $a \in x$, για κάποιο $x \in B$. Όμως αυτό σημαίνει πως, για αυτό το συγκεκριμένο $x \in B$, έχουμε πως $a \in A \cap x$. Από ορισμό ένωσης τώρα, έπεται άμεσα πως $a \in \bigcup\{A \cap x : x \in B\}$.

Για τον έτερο εγκλεισμό, έστω $a \in \bigcup\{A \cap x : x \in B\}$, δηλαδή για κάποιο $x \in B$, έχουμε ότι $a \in A \cap x$. Όμως τότε έχουμε πως $a \in A$ αλλά και $a \in x$, για εκείνο το συγκεκριμένο $x \in B$. Με άλλα λόγια, $a \in A$ και $a \in \bigcup B$, άρα $a \in A \cap \bigcup B$.

ii) Υποθέτουμε ότι $B \neq \varnothing$. Έχουμε, για κάθε a:

$a \in A \cup \bigcap B \longleftrightarrow a \in A$ ή ($a \in x$, για κάθε $x \in B$) $\longleftrightarrow a \in A \cup x$, για κάθε $x \in B \longleftrightarrow$ $a \in \bigcap\{A \cup x : x \in B\}$.

2. Έστω δεδομένο σύνολο A. Δείξτε από τα αξιώματα ότι υπάρχει το σύνολο:

$$\{R : \text{η } R \text{ είναι διμελής σχέση στο } A\}.$$

Λύση.

Ένα σύνολο R είναι διμελής σχέση στο A αν και μόνο αν, εξ ορισμού, ισχύει ότι $R \subseteq A \times A$, δηλαδή αν και μόνο αν $R \in \mathcal{P}(A \times A)$. Με άλλα λόγια:

$$\{R : \text{η } R \text{ είναι διμελής σχέση στο } A\} = \mathcal{P}(A \times A)\,.$$

Το σύνολο αυτό υπάρχει διότι, δεδομένου του A, έχουμε ήδη δείξει στο μάθημα ότι υπάρχει το καρτεσιανό γινόμενο $A \times A$· από το τελευταίο, με εφαρμογή του αξιώματος του δυναμοσυνόλου, υπάρχει και το $\mathcal{P}(A \times A)$.

3. Έστω δεδομένα σύνολα X και Y. Δείξτε από τα αξιώματα ότι υπάρχει το σύνολο:

$$\{A \times B : A \in X \wedge B \in Y\}.$$

Λύση.

Έστω κάποια $A \in X$ και $B \in Y$. Ας δούμε αρχικά πού εγκλείεται ένα τέτοιο καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$. Έχουμε πως κάθε $s \in A \times B$ είναι (διατεταγμένο ζεύγος) της μορφής $s = \langle a, b\rangle$, δηλαδή $s = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, για κάποια $a \in A$ και $b \in B$. Δηλαδή, σε σχέση με τα δεδομένα σύνολα X και Y, έχουμε ότι $a \in \bigcup X$ και $b \in \bigcup Y$. Τότε, προφανώς έχουμε ότι $a, b \in \bigcup X \cup \bigcup Y$, δηλαδή, για κάθε τέτοιο διατεταγμένο ζεύγος $s \in A \times B$, και οι δύο "συντεταγμένες" του s ανήκουν στο $\bigcup X \cup \bigcup Y$. Επομένως, τα σύνολα $\{a\}$ και $\{a, b\}$ ανήκουν και τα δύο στο $\mathcal{P}(\bigcup X \cup \bigcup Y)$, κάτι που με τη σειρά του σημαίνει πως το σύνολο $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, δηλαδή το ίδιο το διατεταγμένο ζεύγος s, ανήκει στο $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X \cup \bigcup Y))$.

Εν συντομία, δείξαμε ότι, για κάθε $A \in X$ και $B \in Y$, ισχύει ο εγκλεισμός:

$$A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X \cup \bigcup Y))\,,$$

από τον οποίο έχουμε αμέσως ότι:

$$A \times B \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X \cup \bigcup Y)))\,,$$

το οποίο μας υποδεικνύει και το σύνολο στο οποίο θα διαχωρίσουμε. Εφόσον τα X και Y είναι δεδομένα, είναι εύκολο να δείτε πως υπάρχει το σύνολο $\bigcup X \cup \bigcup Y$ (από αξιώματα ένωσης, ζεύγους, και ένωσης πάλι), οπότε υπάρχει και το σύνολο $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X \cup \bigcup Y)))$ στο οποίο πρόκειται να διαχωρίσουμε, μετά από τρείς εφαρμογές του αξιώματος του δυναμοσυνόλου.

Ο τύπος με τον οποίο θα διαχωρίσουμε είναι αυτός που λέει πως "το σύνολο z είναι ίσο με το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$, για κάποια $A \in X$ και $B \in Y$", δηλαδή ο τύπος:

$$\Phi(z)\ :\ \exists A\, \exists B\, (A \in X \wedge B \in Y \wedge \forall y\, (y \in z \longleftrightarrow \exists a\, \exists b\, (a \in A \wedge b \in B \wedge \text{“}y = \langle a, b\rangle\text{”}))) ,$$

όπου το "$y = \langle a, b\rangle$" είναι συντομογραφία του τύπου που λέει πως "το σύνολο y είναι ίσο με το διατεταγμένο ζεύγος $\langle a, b\rangle$" (και τον οποίο τύπο έχουμε ήδη αναλύσει στο μάθημα).

Έτσι, από το αξιωματικό σχήμα του διαχωρισμού, υπάρχει το σύνολο

$$\{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X \cup \bigcup Y))) : \Phi(z)\} ,$$

το οποίο είναι ακριβώς το σύνολο που θέλουμε, δηλαδή το $\{A \times B : A \in X \wedge B \in Y\}$.

4. Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $x \subseteq A$ (δηλαδή, κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A). Δείξτε τα ακόλουθα:

   (i) Το $\varnothing$ είναι μεταβατικό.

   (ii) Αν το A είναι μεταβατικό, τότε και το $A \cup \{A\}$ είναι μεταβατικό.

   (iii) Αν το A είναι μεταβατικό, τότε και το $\bigcup(A \cup \{A\})$ είναι μεταβατικό.

   Ο ορισμός του μεταβατικού συνόλου είναι σημαντικός και θα μας χρησιμεύσει κατ΄ επανάληψη σε επόμενες ενότητες του μαθήματος, γι΄ αυτό δώστε προσοχή.

   Λύση.

   (i) Προφανώς ισχύει πως, για κάθε x, αν $x \in \varnothing$ τότε $x \subseteq \varnothing$.

   (ii) Έστω A μεταβατικό. Έστω $x \in A \cup \{A\}$ και έστω $y \in x$ · θέλουμε να δείξουμε ότι $y \in A \cup \{A\}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
   (α) αν $x \in A$, τότε $y \in A$ (αφού το A είναι μεταβατικό) και άρα $y \in A \cup \{A\}$.
   (β) αν $x = A$, τότε προφανώς $y \in A \cup \{A\}$.
   Σε κάθε περίπτωση $y \in A \cup \{A\}$ και άρα το $A \cup \{A\}$ είναι μεταβατικό.

   (iii) Δείχνουμε, γενικότερα, πως αν A είναι μεταβατικό, τότε και το $\bigcup A$ είναι μεταβατικό. Για αυτό, έστω

   $$x \in y \in \bigcup A ,$$

   από το οποίο θέλουμε να δείξουμε ότι και $x \in \bigcup A$.

   Αφού $y \in \bigcup A$, υπάρχει κάποιο $z \in A$ τέτοιο ώστε $y \in z$, δηλαδή $y \in z \in A$. Όμως επειδή το A είναι μεταβατικό, έπεται ότι $y \in A$. Δηλαδή, το x ανήκει σε κάποιο στοιχείο του A (συγκεκριμένα, στο y). Άρα, $x \in \bigcup A$.

   Έχοντας δείξει αυτή τη γενική ιδιότητα, το ερώτημα (iii) έπεται από το (ii), δηλαδή, αφού το A είναι μεταβατικό, τότε και το $A \cup \{A\}$ είναι μεταβατικό από (ii), και άρα και το $\bigcup(A \cup \{A\})$ είναι μεταβατικό.

5. Άσκηση 2.14 (σελ. 41), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

   Δώστε προσοχή και σε αυτήν την (κατά τα άλλα όχι ιδιαίτερα δύσκολη) άσκηση, καθώς κι αυτή δείχνει κάτι που θα μας χρησιμεύσει σε επόμενες ενότητες του μαθήματος.

   Λύση.

   Έστω A σύνολο συναρτήσεων τέτοιο ώστε:

   $$(\forall\, f \in A)\, (\forall\, g \in A)\, (f \subseteq g \,\vee\, g \subseteq f)\,.$$

   Με άλλα λόγια, και στην ορολογία των διατάξεων, η υπόθεση μάς λέει πως κάθε δύο συναρτήσεις από το A είναι *συγκρίσιμες* (δηλαδή, η διάταξη $\subseteq$ είναι *ολική* στο A).

   Δείχνουμε πρώτα πως το σύνολο $\bigcup A$ είναι συνάρτηση. Κατ' αρχάς, το ότι το $\bigcup A$ είναι (διμελής) σχέση είναι άμεσο από το ότι κάθε στοιχείο του A, όντας συνάρτηση, είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Άρα, αρκεί να δείξουμε πως το $\bigcup A$ είναι μονοσήμαντη σχέση.

   Έστω $\langle x, y\rangle \in \bigcup A$ και $\langle x, z\rangle \in \bigcup A$. Θα δείξουμε ότι $y = z$. Αρχικά, υπάρχουν $f \in A$ και $g \in A$ τέτοια ώστε $\langle x, y\rangle \in f$ και $\langle x, z\rangle \in g$. Όμως, από υπόθεση, έχουμε ότι είτε $f \subseteq g$ ή $g \subseteq f$. Σε κάθε περίπτωση, έπεται πως $f(x) = g(x)$ δηλαδή $y = z$ (δείτε την Παρατήρηση, ακριβώς πριν την Πρόταση 8, στη σελ. 25), το οποίο είναι και το ζητούμενο.

   Με άλλα λόγια, δείξαμε πως αν A είναι ένα σύνολο συναρτήσεων οι οποίες είναι ανά δύο συγκρίσιμες ως προς $\subseteq$, τότε το $\bigcup A$ είναι κι αυτό συνάρτηση.

   Το γεγονός πως, για κάθε $f \in A$, έχουμε ότι $f \subseteq \bigcup A$ είναι άμεσο από τον ορισμό της ένωσης. Δηλαδή, εδώ δε χρειάζεται επί της ουσίας να δείξουμε τίποτα, απλά να παρατηρήσουμε. Ωστόσο, έχει αξία αυτή η παρατήρηση, και για αυτό αναφέρεται στην άσκηση, γιατί μας λέει πως, στο πλαίσιο της υπόθεσης, η συνάρτηση $\bigcup A$ *επεκτείνει* κάθε συνάρτηση $f \in A$ (με άλλα λόγια, η συνάρτηση $\bigcup A$ είναι *άνω φράγμα* –ως προς $\subseteq$– του συνόλου A).

6. Άσκηση 2.15 (σελ. 41), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

   Λύση. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνάρτηση και έστω οικογένεια συνόλων $(A_i)_{i\in I}$ (με $I \neq \varnothing$).

   i) Έχουμε, για κάθε y:

   $y \in f[\bigcup_{i\in I} A_i] \longleftrightarrow$ υπάρχει $i \in I$ και υπάρχει $x \in A_i$ τέτοιο ώστε $y = f(x) \longleftrightarrow$ υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $y \in f[A_i] \longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f[A_i]$.

   ii) Έχουμε, για κάθε y:

   Έστω ότι $y \in f[\bigcap_{i\in I} A_i]$, δηλαδή υπάρχει x τέτοιο ώστε $y = f(x)$ και $x \in A_i$ για κάθε $i \in I$. Έπεται πως, για κάθε $i \in I$, υπάρχει $x \in A_i$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$, δηλαδή για κάθε $i \in I$ έχουμε ότι $y \in f[A_i]$. Με άλλα λόγια, $y \in \bigcap_{i\in I} f[A_i]$, το οποίο δείχνει τον επιθυμητό εγκλεισμό $f[\bigcap_{i\in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i]$.

   iii) Έχουμε, για κάθε x:

   $x \in f^{-1}[\bigcup_{i\in I} A_i] \longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} A_i \longleftrightarrow$ υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $f(x) \in A_i \longleftrightarrow$ υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $x \in f^{-1}[A_i] \longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}[A_i]$.

iv) Έχουμε, για κάθε x:

$x \in f^{-1}[\bigcap_{i\in I} A_i] \longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} A_i \longleftrightarrow$ για κάθε $i \in I$ έχουμε ότι $f(x) \in A_i \longleftrightarrow$ για κάθε $i \in I$ έχουμε ότι $x \in f^{-1}[A_i] \longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}[A_i]$.

7. Άσκηση 2.19 (σελ. 42), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

Λύση.

Δίνουμε κάποια παραδείγματα για τις ζητούμενες περιπτώσεις (οι οποίες είναι όλες δυνατές). Προφανώς, τα παραδείγματα δεν είναι μοναδικά.

Έστω $A = \{a, b, c\}$, όπου $c \neq a \neq b \neq c$. Όλες οι σχέσεις R που ορίζουμε παρακάτω είναι στο σύνολο A, δηλαδή $R \subseteq A \times A$.

i)

- **Η R είναι μόνο ανακλαστική.**
  Θεωρούμε την $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$.
- **Η R είναι μόνο συμμετρική.**
  Θεωρούμε την $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$.
- **Η R είναι μόνο μεταβατική.**
  Θεωρούμε την $R = \{\langle a, b\rangle\}$. Εναλλακτικά, π.χ., την $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle\}$.

ii)

- **Η R είναι ανακλαστική και συμμετρική (και όχι μεταβατική).**
  Θεωρούμε την $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$.
- **Η R είναι συμμετρική και μεταβατική (και όχι ανακλαστική).**
  Θεωρούμε την $R = \varnothing$. Εναλλακτικά, π.χ., την $R = \{\langle a, a\rangle\}$.
- **Η R είναι ανακλαστική και μεταβατική (και όχι συμμετρική).**
  Θεωρούμε την $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle\}$.

8. Άσκηση 2.23 (σελ. 42), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

Λύση.

Θα λύσουμε μόνο την περίπτωση ελαχιστικού στοιχείου. Η περίπτωση μεγιστικού είναι ανάλογη.

Έστω $\langle X, \preccurlyeq\rangle$ ολική διάταξη και έστω $a \in X$ δεδομένο ελαχιστικό στοιχείο του X, δηλαδή:

$$(\forall\, x \in X)\,(x \preccurlyeq a \longrightarrow x = a)\,.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι, για κάθε $x \in X$, έχουμε $a \preccurlyeq x$ (δηλαδή, το a είναι ελάχιστο στοιχείο του X).

Έστω $x \in X$. Επειδή η διάταξη είναι ολική, έχουμε πως είτε $a \preccurlyeq x$ ή $x \preccurlyeq a$. Στη δεύτερη περίπτωση, από υπόθεση πως το a είναι ελαχιστικό, έπεται πως $x = a$. Επομένως, για οποιοδήποτε $x \in X$, έχουμε πως είτε $a \preccurlyeq x$ ή $x = a$. Με άλλα λόγια, για κάθε $x \in X$, έχουμε πως $a \preccurlyeq x$ που είναι και το ζητούμενο.

9. Άσκηση 2.27 (σελ. 42), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

   Λύση.

   Έστω $f : A \longrightarrow B$ ισομορφισμός μεταξύ των διατεταγμένων συνόλων $\langle A, \preccurlyeq_A \rangle$ και $\langle B, \preccurlyeq_B \rangle$, και έστω $a \in A$.

   Υποθέτουμε πρώτα ότι το a είναι ελαχιστικό στοιχείο του A και θα δείξουμε ότι τότε το $f(a)$ είναι ελαχιστικό στοιχείο του B. Προς άτοπο, έστω ότι υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε $y \prec_B f(a)$, δηλαδή $y \preccurlyeq_B f(a) \wedge y \neq f(a)$. Επειδή η f είναι ισομορφισμός, ειδικότερα επί, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Δηλαδή, έχουμε ότι:

   $$f(x) \preccurlyeq_B f(a) \wedge f(x) \neq f(a).$$

   Όμως τότε, πάλι επειδή η f είναι ισομορφισμός, έπεται ότι:

   $$x \preccurlyeq_A a \wedge x \neq a\,,$$

   το οποίο όμως αντικρούει την υπόθεση πως το a είναι ελαχιστικό του A, δηλαδή άτοπο.

   Οι υπόλοιπες περιπτώσεις (ελάχιστο, μεγιστικό, μέγιστο) είναι ανάλογες.

   Τέλος, αν η $\preccurlyeq_A$ είναι γραμμική, τότε για να δείξουμε πως και η $\preccurlyeq_B$ είναι γραμμική θεωρούμε οποιαδήποτε $y, y' \in B$. Επειδή η f είναι επί, υπάρχουν $x, x' \in A$ τέτοια ώστε $y = f(x)$ και $y' = f(x')$. Επειδή η $\preccurlyeq_A$ είναι γραμμική, έπεται πως είτε $x \preccurlyeq_A x'$ ή $x' \preccurlyeq_A x$. Όμως, πάλι επειδή η f είναι ισομορφισμός, τότε θα έχουμε ότι είτε $f(x) \preccurlyeq_B f(x')$ ή $f(x') \preccurlyeq_B f(x)$. Με άλλα λόγια, είτε $y \preccurlyeq_B y'$ ή $y' \preccurlyeq_B y$, που είναι και το ζητούμενο.

10. Άσκηση 2.30 (σελ. 43), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

    Λύση.

    Έστω $\langle A, \preccurlyeq_1 \rangle$ και $\langle B, \preccurlyeq_2 \rangle$ μερικώς διατεταγμένα σύνολα, και έστω $f : A \longrightarrow B$ τέτοια ώστε:

    $$(\forall\, x \in A)\,(\forall\, y \in A)\,(x \preccurlyeq_1 y \longleftrightarrow f(x) \preccurlyeq_2 f(y))\,.$$

    Έστω $x, y \in A$ τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$. Θα δείξουμε ότι $x = y$.

    Αφού $f(x) = f(y)$ και η $\preccurlyeq_2$ είναι μερική διάταξη (και άρα ανακλαστική), έχουμε ότι ισχύει $f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$ και $f(y) \preccurlyeq_2 f(x)$. Από αυτές τις δύο συνθήκες όμως, και από την υπόθεση για τη συνάρτηση f, συμπεραίνουμε πως $x \preccurlyeq_1 y$ και $y \preccurlyeq_1 x$. Από τις τελευταίες δύο συνθήκες όμως, και από το γεγονός πως η $\preccurlyeq_1$ είναι μερική διάταξη (και άρα αντισυμμετρική), έπεται πως $x = y$ που είναι και το ζητούμενο.