

2η Σειρά Ασκήσεων

ΛΥΣΕΙΣ

1. Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $\omega \notin \omega$ (με άλλα λόγια, το ω δεν είναι φυσικός αριθμός).
- (ii) Για κάθε $n \in \omega$, ισχύει $\omega \notin n$.
- (iii) Για κάθε $n \in \omega$, το n δεν είναι επαγωγικό.
- (iv) Το σύνολο $\omega \cup \{\omega\}$ δεν είναι φυσικός αριθμός.
- (v) Το σύνολο $\omega \cup \{\omega\}$ είναι μεταβατικό αλλά όχι επαγωγικό.

Λύση.

Είναι σημαντικό να θυμάστε ότι, γενικά, για την επίλυση ασκήσεων που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς, η βασική μας εργαλειοθήκη περιλαμβάνει τις διάφορες ιδιότητες που είδαμε στο Κεφάλαιο 3 των σημειώσεων. Ανάμεσα σε αυτές τις ιδιότητες, κυρίαρχη θέση κατέχει φυσικά η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής (σε κάποια από τις μορφές της, συμπεριλαμβανομένης και της Αρχής του Ελαχίστου).

- (i) Η Πρόταση 5 (σελ. 47) μάς λέει ότι κανένας φυσικός αριθμός δεν ανήκει στον εαυτό του. Επομένως, αν ίσχυε το $\omega \in \omega$, αν δηλαδή το ω ήταν φυσικός αριθμός, τότε θα έπρεπε να είχαμε και ότι $\omega \notin \omega$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, ισχύει ότι $\omega \notin \omega$, δηλαδή το ω δεν είναι φυσικός αριθμός.
- (ii) Προς άτοπο, έστω ότι, για κάποιο $n \in \omega$, έχουμε ότι $\omega \in n$. Όμως τότε, από Πρόταση 3 (σελ. 46), δηλαδή από μεταβατικότητα, έπεται ότι $\omega \in \omega$, το οποίο όμως είναι άτοπο (από το προηγούμενο ερώτημα). Άρα, συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \in \omega$, ισχύει το $\omega \notin n$.
- (iii) Έστω $n \in \omega$. Αν το n ήταν επαγωγικό, θα είχαμε ότι $\omega \subseteq n$ (αφού το ω είναι το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο). Δηλαδή, θα είχαμε ότι $\omega = n$ (μιας που ισχύει και ο εγκλεισμός $n \subseteq \omega$). Αυτό όμως οδηγεί στο $n \in \omega = n$, δηλαδή στο $n \in n$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, για κάθε $n \in \omega$, το n δεν είναι επαγωγικό.
- (iv) Έστω ότι $\omega \cup \{\omega\} \in \omega$. Από μεταβατικότητα, έπεται πάλι ότι $\omega \in \omega$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, το $\omega \cup \{\omega\}$ δεν είναι φυσικός αριθμός.
- (v) Ξέρουμε ότι το ω είναι μεταβατικό σύνολο. Από Άσκηση 4 της 1ης Σειράς Ασκήσεων, έπεται ότι και το $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$ είναι μεταβατικό.

Για να δείξουμε ότι το $\omega \cup \{\omega\}$ δεν είναι επαγωγικό, αρκεί να βρούμε ένα στοιχείο $x \in \omega \cup \{\omega\}$ τέτοιο ώστε $x^+ \notin \omega \cup \{\omega\}$. Η προφανής επιλογή είναι η $x = \omega$. Ας δούμε ότι $x^+ = \omega^+ \notin \omega \cup \{\omega\}$. Για αυτό, παρατηρήστε ότι αν $\omega \cup \{\omega\} \in \omega \cup \{\omega\}$, τότε έχουμε δύο περιπτώσεις: είτε $\omega \cup \{\omega\} \in \omega$ ή $\omega \cup \{\omega\} = \omega$. Όμως, όπως και παραπάνω, και οι δύο περιπτώσεις οδηγούν στο $\omega \in \omega$, δηλαδή σε άτοπο. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το $\omega \cup \{\omega\}$ δεν είναι επαγωγικό.

2. Θεωρήστε το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$, δηλαδή το δυναμοσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών. Δείξτε τα ακόλουθα:

- (i) Το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$ δεν είναι φυσικός αριθμός.
- (ii) Το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$ δεν είναι επαγωγικό.
- (iii) $\omega \subseteq \mathcal{P}(\omega)$.
- (iv) $\mathcal{P}(\omega) \setminus \omega \neq \emptyset$. Μάλιστα, δώστε δύο παραδείγματα (διαφορετικών) συνόλων που να ανήκουν στο $\mathcal{P}(\omega) \setminus \omega$.

Λύση.

- (i) Παρατηρήστε ότι $\omega \in \mathcal{P}(\omega)$. Άρα, αν είχαμε ότι $\mathcal{P}(\omega) \in \omega$, τότε θα είχαμε (ξανά από μεταβατικότητα) και ότι $\omega \in \omega$, δηλαδή άτοπο. Επομένως, το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$ δεν είναι φυσικός αριθμός.
- (ii) Αρκεί να βρούμε ένα στοιχείο $x \in \mathcal{P}(\omega)$ τέτοιο ώστε $x^+ \notin \mathcal{P}(\omega)$. Η προφανής επιλογή, και πάλι, είναι η $x = \omega$. Απλά παρατηρήστε ότι, αφού $\omega \notin \omega$, έχουμε άμεσα ότι $\omega \cup \{\omega\} \not\subseteq \omega$. Επομένως, $\omega^+ \notin \mathcal{P}(\omega)$.
- (iii) Ξέρουμε ότι το ω είναι μεταβατικό σύνολο. Επομένως, αν $n \in \omega$, τότε και $n \subseteq \omega$. Δηλαδή, αν $n \in \omega$, τότε έχουμε ότι $n \in \mathcal{P}(\omega)$, το οποίο δείχνει το ζητούμενο.

Εναλλακτικά, και αφού ξέρουμε ότι το ω είναι μεταβατικό σύνολο, αυτό το ερώτημα έπεται και από την Άσκηση 3 παρακάτω.

- (iv) Έστω $x = \{\{\emptyset\}\} = \{1\}$ και έστω $y = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 2\}$. Είναι εύκολο να δείξετε ότι, τόσο το x όσο και το y ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{P}(\omega) \setminus \omega$ (και φυσικά $x \neq y$).

3. Έστω σύνολο X . Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το X είναι μεταβατικό (δηλαδή, αν $b \in a \in X$, τότε $b \in X$).
- (ii) $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.
- (iii) $\bigcup X \subseteq X$.

Λύση.

- (i) $\implies$ (ii):

Υποθέτουμε ότι το X είναι μεταβατικό σύνολο, δηλαδή:

$$b \in a \in X \longrightarrow b \in X.$$

Επομένως, αν $a \in X$, τότε $a \subseteq X$. Δηλαδή, αν $a \in X$, τότε και $a \in \mathcal{P}(X)$ που είναι και το ζητούμενο.

- (ii) $\implies$ (iii):

Υποθέτουμε ότι, για κάθε a , αν $a \in X$, τότε $a \subseteq X$. Έστω τώρα κάποιο $b \in \bigcup X$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $b \in X$.

Επειδή $b \in \bigcup X$, υπάρχει κάποιο $a \in X$ τέτοιο ώστε $b \in a$. Όμως τότε, από υπόθεση, έχουμε ότι $a \subseteq X$ και άρα $b \in X$.

- (iii) $\implies$ (i):

Υποθέτουμε ότι $\bigcup X \subseteq X$. Έστω ότι, για κάποια a και b έχουμε ότι:

$$b \in a \in X,$$

από το οποίο θέλουμε να δείξουμε ότι $b \in X$. Από το $b \in a \in X$ έπεται άμεσα, από ορισμό ένωσης, ότι $b \in \bigcup X$. Τότε, η υπόθεσή μας ($\bigcup X \subseteq X$) συνεπάγεται ότι $b \in X$, το οποίο είναι και το ζητούμενο.

- 3 $\frac{1}{2}$. Με αφορμή την Άσκηση 4 (iii) της 1ης Σειράς Ασκήσεων, ελπίζω να έχετε μάθει ότι αν ένα σύνολο A είναι μεταβατικό, τότε και το $\bigcup A$ είναι μεταβατικό. Ωστόσο, δείξτε ότι δεν ισχύει και το αντίστροφο, δίνοντας ένα γρήγορο αντιπαράδειγμα.

Γρήγορο αντιπαράδειγμα: Έστω $A = \{\{\emptyset\}\} = \{1\}$.

4. Αυτή είναι ουσιαστικά η Άσκηση 3.10 (σελ. 60), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη, με μόνη διαφορά το ότι εμείς γράφουμε x^+ για το επόμενο σύνολο του x (αντί για x' που γράφει ο Σκανδάλης).

Αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικούς αριθμούς $m, n \in \omega$, ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $m < n \iff m^+ \leq n$.
- (ii) $m < n \iff m^+ < n^+$.
- (iii) $m < n^+ \iff m \leq n$.
- (iv) $m \leq n^+ \iff m < n \vee m = n^+$. (Λανθασμένη διατύπωση!)

Λύση.

Θα χρησιμοποιήσουμε κατ' επανάληψη την ακόλουθη βασική ιδιότητα της διάταξης στους φυσικούς αριθμούς (θυμηθείτε και την Πρόταση 7, σελ. 47). Για κάθε $m, n \in \omega$:

$$m \leq n \iff m \subseteq n \iff m \in n \vee m = n$$

- (i) Αρχικά δείχνουμε άμεσα την κατεύθυνση « $\leftarrow$ ». Έστω λοιπόν ότι $m^+ \leq n$, για κάποιους φυσικούς αριθμούς $m, n \in \omega$. Τότε, έπεται ότι $m^+ \subseteq n$ και, άρα, έχουμε ότι είτε $m^+ \in n$ ή $m^+ = n$. Παρατηρήστε ότι και στις δύο περιπτώσεις, λόγω του ότι προφανώς ισχύει ότι $m \in m^+$, έχουμε ότι $m \in n$. Δηλαδή, $m < n$.

Για την άλλη κατεύθυνση, δηλαδή για να δείξουμε ότι $m < n \implies m^+ \leq n$, κάνουμε επαγωγή στο n .

- Αν $n = 0$, η συνεπαγωγή ισχύει τετριμμένα (ψευδής προκειμένη).
- Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $n \in \omega$, ισχύει ότι $m < n \implies m^+ \leq n$.

Έστω $m < n^+$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $m < n$, τότε η επαγωγική μας υπόθεση δίνει $m^+ \leq n$, και άρα $m^+ \leq n^+$ (αφού $n < n^+$).

(β) Αν $m = n$, τότε $m^+ = n^+$ και άρα $m^+ \leq n^+$.

Σε κάθε περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι $m < n^+ \implies m^+ \leq n^+$ και, άρα, το ζητούμενο έπεται από επαγωγή.

Σημείωση: θα μπορούσαμε να δείξουμε αυτήν την κατεύθυνση και απευθείας, χωρίς επαγωγή. Σκεφτείτε πώς.

- (ii) Η κατεύθυνση « $\implies$ » προκύπτει άμεσα από το ερώτημα (i): αν $m < n$, τότε $m^+ \leq n$ και άρα $m^+ < n^+$ (αφού $n < n^+$).

Για την άλλη κατεύθυνση, έστω ότι, για κάποια $m, n \in \omega$, ισχύει ότι $m^+ < n^+$, δηλαδή $m \cup \{m\} \in n \cup \{n\}$. Όμως τότε, έχουμε ότι είτε $m \in n$ ή $m = n$. Παρατηρούμε ότι το $m = n$ δεν μπορεί να ισχύει, αφού από υπόθεση έχουμε ότι $m^+ < n^+$, δηλαδή $m^+ \neq n^+$. Συμπεραίνουμε επομένως ότι $m \in n$, δηλαδή ότι $m < n$.

- (iii) Δείχνουμε πρώτα την κατεύθυνση « $\leftarrow$ ». Έστω λοιπόν ότι $m \leq n$, για κάποιους φυσικούς αριθμούς $m, n \in \omega$. Τότε, έπεται ότι $m \subseteq n$ και, άρα, έχουμε ότι είτε $m \in n$ ή $m = n$. Παρατηρήστε ότι και στις δύο περιπτώσεις, λόγω του ότι προφανώς ισχύει ότι $n \in n^+$, έχουμε ότι $m \in n^+$. Δηλαδή, $m < n^+$.

Για την άλλη κατεύθυνση, έστω ότι, για κάποιους φυσικούς αριθμούς $m, n \in \omega$, έχουμε ότι $m < n^+$, δηλαδή $m \in n \cup \{n\}$. Τότε, είτε $m \in n$ ή $m = n$, δηλαδή $m \leq n$.

- (iv) Κατ' αρχάς, για να υποδείξουμε το λάθος στο δεξί μέλος της ισοδυναμίας, επιλέγουμε $m = n$ (για οποιουδήποτε φυσικούς αριθμούς $m, n \in \omega$). Τότε, προφανώς έχουμε ότι $m \leq n^+$. Ωστόσο, δεν ισχύει ούτε το $m < m$ αλλά ούτε και το $m = m^+$.

Το πρόβλημα στο δεξί μέλος της ισοδυναμίας διορθώνεται αν γράψουμε « $m \leq n$ » αντί για « $m < n$ ». Τότε, η **σωστή διατύπωση**, την οποία και θα αποδείξουμε ευθύς αμέσως, είναι η εξής. Για κάθε $m, n \in \omega$:

$$m \leq n^+ \longleftrightarrow m \leq n \vee m = n^+$$

Ξεκινάμε με την κατεύθυνση « $\rightarrow$ ». Έστω ότι, για κάποια $m, n \in \omega$, ισχύει ότι $m \leq n^+$. Τότε, έχουμε ότι $m \subseteq n^+$, δηλαδή είτε $m \in n^+$ ή $m = n^+$. Όμως, από ερώτημα (iii), το πρώτο μέρος αυτής της διάξευξης είναι ισοδύναμο με $m \leq n$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι είτε $m \leq n$ ή $m = n^+$, που είναι και το ζητούμενο.

Η άλλη κατεύθυνση είναι (σχεδόν) άμεση. Αν $m = n^+$, τότε προφανώς $m \leq n^+$. Επίσης, αν $m \leq n$, τότε πάλι $m \leq n^+$ (αφού $n < n^+$). Σε κάθε περίπτωση, προκύπτει το ζητούμενο.

5. Άσκηση 3.21 (σελ. 61), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

Αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικούς αριθμούς $k, m, n \in \omega$, ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $k \cdot (m \cdot n) = (k \cdot m) \cdot n$.
- (ii) $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$.
- (iii) $m < n \rightarrow m + k < n + k$.
- (iv) $m < n \rightarrow m \cdot k < n \cdot k$ (για $k \neq 0$).
- (v) $k \cdot m = k \cdot n \rightarrow m = n$ (για $k \neq 0$).

Λύση.

Οι ασκήσεις αυτές είναι κλασικές περιπτώσεις Μαθηματικής Επαγωγής και σκοπό έχουν την επαναλαμβανόμενη εξάσκησή σας στη χρήση της μεθόδου.

Σημειώνω ότι η παραπάνω σειρά με την οποία έχουν διατυπωθεί αυτές οι ασκήσεις στις σημειώσεις του Σκανδάλη δεν είναι καθόλου βολική. Για τη διευκόλυνσή μας, δείχνουμε πρώτα ότι ισχύουν μερικές σχετικές ιδιότητες (όπως, π.χ., οι επιμεριστικές), καθώς θα μας χρησιμεύσουν στις υπόλοιπες επαγωγές.

(I) Δεξιά επιμεριστική ιδιότητα: για κάθε $k, m, n \in \omega$, ισχύει $(m+n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$.

Το δείχνουμε με επαγωγή στο k .

- Για $k = 0$, έχουμε άμεσα ότι $m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0 + 0 = 0 = (m + n) \cdot 0$.
- Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $k \in \omega$, ισχύει το $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$. Έχουμε:

$$(m+n) \cdot k^+ = (m+n) \cdot k + (m+n) = (m \cdot k + n \cdot k) + (m+n) = (m \cdot k + m) + (n \cdot k + n) = m \cdot k^+ + n \cdot k^+.$$

(II) Για κάθε $m \in \omega$, ισχύει $0 \cdot m = 0$.

Αυτό αποδεικνύεται με μία απλή επαγωγή στο m (την οποία αφήνω να κάνετε εσείς, για εξάσκηση). Παρατηρήστε ότι αυτό χρειάζεται να το δείξουμε, διότι την πράξη του πολλαπλασιασμού την ορίσαμε ώστε, για κάθε $m \in \omega$, να είναι $m \cdot 0 = 0$ (με αυτή τη σειρά).

(III) Για κάθε $m \in \omega$, ισχύει $m^+ = m + 1$.

Αυτή είναι μία βολική ιδιότητα η οποία επίσης αποδεικνύεται με μία απλή επαγωγή στο m (και την οποία πάλι αφήνω να κάνετε εσείς, για εξάσκηση).

(IV) Για κάθε $m \in \omega$, ισχύει $1 \cdot m = m$.

Επίσης αποδεικνύεται με μία απλή επαγωγή στο m (την οποία ομοίως αφήνω να κάνετε εσείς, για εξάσκηση). Θα χρησιμοποιήσετε σε κάποιο σημείο την προηγούμενη ιδιότητα.

(V) Για κάθε $m, n \in \omega$, ισχύει $m \cdot n = n \cdot m$.

Το δείχνουμε με επαγωγή στο n .

- Για $n = 0$, έχουμε άμεσα ότι $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$.
- Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $n \in \omega$, ισχύει το $m \cdot n = n \cdot m$. Έχουμε:

$$m \cdot n^+ = m \cdot n + m = n \cdot m + m = n \cdot m + 1 \cdot m = (n + 1) \cdot m = n^+ \cdot m.$$

(VI) Αριστερή επιμεριστική ιδιότητα: για κάθε $k, m, n \in \omega$, ισχύει $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$.

Γνωρίζοντας όλα τα παραπάνω, η ιδιότητα αυτή έπεται από τη δεξιά επιμεριστική και την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού.

Πάμε τώρα στις επαγωγές που μας ζητάει η εν λόγω άσκηση.

(i) Κάνουμε επαγωγή στο n .

- Για $n = 0$, έχουμε άμεσα ότι $k \cdot (m \cdot 0) = k \cdot 0 = 0 = (k \cdot m) \cdot 0$.
- Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $n \in \omega$, ισχύει το $k \cdot (m \cdot n) = (k \cdot m) \cdot n$. Έχουμε:

$$(k \cdot m) \cdot n^+ = (k \cdot m) \cdot n + k \cdot m = k \cdot (m \cdot n) + k \cdot m = k \cdot (m \cdot n + m) = k \cdot (m \cdot n^+).$$

(ii) Το δείξαμε παραπάνω.

(iii) Έστω $m, n \in \omega$ τέτοια ώστε $m < n$. Κάνουμε επαγωγή στο k .

- Για $k = 0$, έχουμε άμεσα ότι $m + 0 = m < n = n + 0$.
- Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $k \in \omega$, ισχύει το $m + k < n + k$. Τότε, από το ερώτημα (ii) της Άσκησης 4 παραπάνω, έχουμε ότι $(m + k)^+ < (n + k)^+$ και άρα, από τον αναδρομικό ορισμό της πρόσθεσης, $m + k^+ < n + k^+$.

(iv) Έστω $m, n \in \omega$ τέτοια ώστε $m < n$. Κάνουμε επαγωγή στο k , ξεκινώντας από $k = 1$.

- Για $k = 1$, έχουμε άμεσα ότι $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m < n = 1 \cdot n = n \cdot 1$.
- Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $k \in \omega$ ($k \neq 0$), ισχύει το $m \cdot k < n \cdot k$. Έχουμε:

$$m \cdot k^+ = m \cdot k + m < n \cdot k + m < n \cdot k + n = n \cdot k^+.$$

(v) $k \cdot m = k \cdot n \longrightarrow m = n$ (για $k \neq 0$).

Παρατηρήστε ότι, λόγω αντιμεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού, αρκεί να δείξουμε ότι $m \cdot k = n \cdot k \longrightarrow m = n$ (για $k \neq 0$). Ισοδύναμα, μπορούμε να δείξουμε το αντιθετο-αντίστροφο, δηλαδή το: $m \neq n \longrightarrow m \cdot k \neq n \cdot k$ (για $k \neq 0$).

Όμως αυτό έπεται από το προηγούμενο ερώτημα, ως εξής. Έστω $m, n \in \omega$ με $m \neq n$. Τότε, είτε $m < n$ ή $n < m$. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι (για $k \neq 0$) είτε $m \cdot k < n \cdot k$ ή $n \cdot k < m \cdot k$. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, έχουμε ότι $m \cdot k \neq n \cdot k$, που είναι και το ζητούμενο.

6. Άσκηση 3.26 (σελ. 61-62), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

Λύση.

Τη σχέση R στο σύνολο $\omega \times \omega$ την ορίσαμε ως εξής. Για κάθε $m, n, k, l \in \omega$:

$$\langle m, n \rangle R \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k.$$

Αρχικά, δείχνουμε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

- Η R είναι ανακλαστική: για κάθε $m, n \in \omega$, ξέρουμε ότι $m + n = n + m$ (έχουμε δείξει ότι η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική). Επομένως, $\langle m, n \rangle R \langle m, n \rangle$.
- Η R είναι συμμετρική: έστω $m, n, k, l \in \omega$ και ας υποθέσουμε ότι $\langle m, n \rangle R \langle k, l \rangle$, δηλαδή $m + l = n + k$. Ξανά από αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης, έχουμε ότι $k + n = l + m$, δηλαδή $\langle k, l \rangle R \langle m, n \rangle$.
- Η R είναι μεταβατική: έστω $m, n, k, l, s, t \in \omega$ και ας υποθέσουμε ότι:

$$\langle m, n \rangle R \langle k, l \rangle \wedge \langle k, l \rangle R \langle s, t \rangle,$$

δηλαδή $m + l = n + k$ καθώς και $k + t = l + s$. Έπεται ότι:

$$(m + l) + (k + t) = (n + k) + (l + s).$$

Από προσεταιριστικότητα και αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης, έχουμε ισοδύναμα:

$$(m + t) + (l + k) = (n + s) + (l + k),$$

από όπου προκύπτει ότι $m + t = n + s$, δηλαδή $\langle m, n \rangle R \langle s, t \rangle$.

Σημείωση: στο τελευταίο βήμα, χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της «διαγραφής», δηλαδή την ιδιότητα: για κάθε $k, m, n \in \omega$,

$$m + k = n + k \longrightarrow m = n.$$

Αυτήν την ιδιότητα, παρόλο που δεν την έχουμε ελέγξει μέχρι στιγμής, είναι εύκολο να την αποδείξετε με απλή επαγωγή στο k (και σας προτείνω να το κάνετε, για εξάσκηση).

Έχοντας δείξει ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\omega \times \omega$, θα δείξουμε τώρα ότι κάθε στοιχείο του $\omega \times \omega$ είναι R -ισοδύναμο με κάποιο στοιχείο του οποίου τουλάχιστον η μία συντεταγμένη είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή, θα δείξουμε ότι, για κάθε $k, l \in \omega$, υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε είτε $\langle k, l \rangle R \langle n, 0 \rangle$ ή $\langle k, l \rangle R \langle 0, n \rangle$. Έστω λοιπόν κάποια $k, l \in \omega$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $l \leq k$, τότε υπάρχει $n \in \omega$ (ίσως $n = 0$) τέτοιο ώστε $l + n = k$. Σε αυτήν την περίπτωση, ελέγχεται άμεσα ότι $\langle k, l \rangle R \langle n, 0 \rangle$.

(β) Αν $k < l$, τότε υπάρχει $n \in \omega$ (μάλιστα $n \neq 0$) τέτοιο ώστε $k + n = l$. Σε αυτήν την περίπτωση, ελέγχεται και πάλι άμεσα ότι $\langle k, l \rangle R \langle 0, n \rangle$.

7. Δείξτε ότι, όπως τα ορίσαμε στο μάθημα, τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ (των ακεραίων και ρητών αριθμών, αντίστοιχα) υπάρχουν. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι η ύπαρξή τους προκύπτει από τα αξιώματα.

Λύση.

Όπως σημειώνεται και στην υπόδειξη της άσκησης, δεν είναι απαραίτητο να καταγράψουμε πλήρως και λεπτομερώς τους ακριβείς τύπους (στη γλώσσα της συνολοθεωρίας) μέσω των οποίων ορίζονται τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ (εξ άλλου, οι τύποι αυτοί είναι αρκετά μεγάλοι). Ωστόσο, μπορούμε να δώσουμε μία γενική περιγραφή που να δείχνει, πειστικά, ότι τα σύνολα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ όντως υπάρχουν.

Πριν από οτιδήποτε άλλο, ας θυμηθούμε ότι το ω ορίστηκε ως το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο (με το αξίωμα του απείρου να μας δίνει την ύπαρξη τουλάχιστον ενός επαγωγικού συνόλου). Άρα, μπορούμε να γράψουμε το εξής τύπο:

$$\Phi_\omega(x) : \forall A (\text{«το } A \text{ είναι επαγωγικό»} \rightarrow x \in A),$$

όπου η συντομογραφία «το A είναι επαγωγικό» έχουμε ήδη δει πώς γράφεται στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Με άλλα λόγια, ο παραπάνω τύπος $\Phi_\omega(x)$ ισχύει αν και μόνο αν το x ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο, το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $x \in \omega$, δηλ., αν και μόνο αν το x είναι (συνολοθεωρητικός) φυσικός αριθμός.

Για το σύνολο $\mathbb{Z}$ τώρα, ξεκινάμε με την εξής παρατήρηση. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ορίστηκε ως το σύνολο πηλίκου $\omega \times \omega / R$, μέσω της σχέσης ισοδυναμίας R . Επομένως, ισχύει ότι $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{P}(\omega \times \omega)$. Αυτός ο εγκλεισμός υποδεικνύει ότι η σχετική εφαρμογή του αξιωματικού σχήματος του διαχωρισμού, η οποία ορίζει και τυπικά (μέσω των αξιωμάτων) το σύνολο $\mathbb{Z}$, γίνεται στο σύνολο $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$. Η ύπαρξη του τελευταίου προκύπτει από τα αξιώματα ως εξής: το αξίωμα του απείρου συνεπάγεται την ύπαρξη του ω (δηλ., του ελάχιστου επαγωγικού συνόλου), από το οποίο έπεται η ύπαρξη του καρτεσιανού γινομένου $\omega \times \omega$, το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται την ύπαρξη του $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$ (με εφαρμογή του αξιώματος του δυναμοσυνόλου).

Άρα, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να βρούμε τον κατάλληλο τύπο (στη γλώσσα της συνολοθεωρίας) με τον οποίο να διαχωρίσουμε στο $\mathcal{P}(\omega \times \omega)$, ώστε προκύψει το επιθυμητό σύνολο $\mathbb{Z}$. Ο τύπος αυτός είναι αρκετά μεγάλος και δεν θα τολμήσουμε να τον καταγράψουμε λεπτομερώς. Ωστόσο, δεν είναι τίποτα το εξωτικό: ο τύπος αυτός απλά «λέει» (στη γλώσσα της συνολοθεωρίας) αυτό ακριβώς που κάναμε όταν ορίζαμε το $\mathbb{Z}$ μέσω της σχέσης ισοδυναμίας R . Όλοι οι βοηθητικοί ορισμοί, οι πράξεις, και οι ιδιότητες (του ω) που χρησιμοποιήσαμε είναι ορίσιμα στη γλώσσα της συνολοθεωρίας, και απλά τα «βάζουμε όλα μαζί» σε έναν ενοποιητικό τύπο, ας τον πούμε $\Phi_{\mathbb{Z}}(x)$, ο οποίος είναι τέτοιος ώστε ο $\Phi_{\mathbb{Z}}(x)$ ισχύει αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή, ο εν λόγω τύπος $\Phi_{\mathbb{Z}}(x)$ εκφράζει συνολοθεωρητικά το «ο x είναι (συνολοθεωρητικός) ακεραίος αριθμός». Με αρκετές (για την ακρίβεια, πολλές) συντομογραφίες, ο τύπος αυτός μοιάζει κάπως έτσι:

$$\Phi_{\mathbb{Z}}(x) : \exists m \exists n (\Phi_\omega(m) \wedge \Phi_\omega(n) \wedge \forall y (y \in x \leftrightarrow (y \in \omega \times \omega \wedge \langle y, \langle m, n \rangle \rangle \in R)))$$

Ο τύπος αυτός λέει ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $m, n \in \omega$ τέτοιοι ώστε το x να είναι ακριβώς (ίσο με) το σύνολο εκείνων των διατεταγμένων ζευγών από το σύνολο $\omega \times \omega$ τα οποία είναι R -ισοδύναμα με το ζεύγος $\langle m, n \rangle$: με άλλα λόγια, ότι $x = [\langle m, n \rangle]_R$. Οι συντομογραφίες δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο (αν και κάπως βαρετό) να ξεδιπλωθούν εντελώς σε αυστηρούς συνολοθεωρητικούς τύπους. Για παράδειγμα, το « $y \in \omega \times \omega$ » λέει απλά ότι το y είναι διατεταγμένο ζεύγος με συντεταγμένες φυσικούς αριθμούς (γράψτε το). Από την άλλη, το « $\langle y, \langle m, n \rangle \rangle \in R$ » θέλει λίγη περισσότερη δουλειά, καθώς πρέπει πρώτα να ορίσουμε

(με τύπο) τη σχέση R . Αυτό, με τη σειρά του, χρειάζεται τον τύπο που ορίζει την πράξη της πρόσθεσης στους φυσικούς. Σε αυτό το σημείο δε θα σας κουράσω άλλο. Αρκεί να έχετε ήδη πειστεί ότι, αν θέλαμε να το κάνουμε, η καταγραφή του πλήρους τύπου $\Phi_{\mathbb{Z}}(x)$ δεν είναι τίποτα το ιδιαίτερα δύσκολο: γίνεται με μία προφανή και μηχανική (απλά χρονοβόρα) διαδικασία.

Με αρκετά ανάλογο τρόπο περιγράφουμε και την κατασκευή του συνόλου $\mathbb{Q}$ των ρητών. Η εύρεση του αντίστοιχου τύπου $\Phi_{\mathbb{Q}}(x)$, ο οποίος εκφράζει (στη γλώσσα της συνολοθεωρίας) το «ο x είναι (συνολοθεωρητικός) ρητός αριθμός» είναι κι αυτή αποτέλεσμα μίας αντίστοιχης (μηχανικής αλλά χρονοβόρας) διαδικασίας, η οποία ακολουθεί, βήμα προς βήμα, την κατασκευή μέσω της οποίας ορίσαμε το $\mathbb{Q}$. Σημειώνω μόνο ότι, έχοντας τον τύπο $\Phi_{\mathbb{Q}}(x)$, το σύνολο στο οποίο διαχωρίζουμε για να αποδείξουμε την ύπαρξη του $\mathbb{Q}$ είναι το $\mathcal{P}(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\}))$, μιας που το σύνολο των ρητών ορίστηκε ως το σύνολο πηλίκο $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\})/S$, μέσω της σχέσης ισοδυναμίας S . Εύκολα βλέπουμε, δεδομένης της ύπαρξης του $\mathbb{Z}$ (την οποία δικαιολογήσαμε παραπάνω), ότι το $\mathcal{P}(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\}))$ υπάρχει (από τα αξιώματα), και άρα έπεται και η ύπαρξη του συνόλου $\mathbb{Q}$.

Τέλος, παρατηρήστε ότι αντίστοιχα ισχύουν και για το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών. Δηλαδή, είναι κι αυτό περιγράψιμο μέσω κάποιου (συνολοθεωρητικού) τύπου $\Phi_{\mathbb{R}}(x)$, ο οποίος επί της ουσίας λέει ότι «το $x \subseteq \mathbb{Q}$ είναι τομή Dedekind». Για την ύπαρξη του $\mathbb{R}$, δεδομένης της ύπαρξης του $\mathbb{Q}$, διαχωρίζουμε στο $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ μέσω του τύπου $\Phi_{\mathbb{R}}(x)$.

8. Αυτή είναι ουσιαστικά η Άσκηση 3.28 (σελ. 62), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη, με το συμβολισμό όμως που χρησιμοποιήσαμε στο μάθημα.

Την ολική διάταξη $\leq_{\mathbb{Z}}$ στους ακεραίους $\mathbb{Z}$ την ορίσαμε ως εξής: για κάθε $m, n, k, l \in \omega$,

$$[\langle m, n \rangle] \leq_{\mathbb{Z}} [\langle k, l \rangle] \longleftrightarrow m + l \leq n + k,$$

όπου, στο αριστερό μέλος της παραπάνω ισοδυναμίας, οι κλάσεις ισοδυναμίας αναφέρονται στη σχέση ισοδυναμίας R στο $\omega \times \omega$ (μέσω της οποίας ορίσαμε το $\mathbb{Z}$), ενώ στο δεξί μέλος της παραπάνω ισοδυναμίας, τα $+$ και $\leq$ αναφέρονται στην πρόσθεση και τη διάταξη στους φυσικούς αριθμούς.

Για κάθε $n \in \omega$, ορίσαμε το $n_{\mathbb{Z}} = [\langle n, 0 \rangle]$, το οποίο είναι ο αντίστοιχος ακέραιος αριθμός (και με αυτόν τον τρόπο ταυτίσαμε το σύνολο ω των φυσικών αριθμών με ένα υποσύνολο του $\mathbb{Z}$). Επίσης, ορίσαμε και το $-n_{\mathbb{Z}} = [\langle 0, n \rangle]$, ο οποίος είναι ο προσθετικός αντίστροφος (κοινώς, ο αντίθετος) του ακεραίου $n_{\mathbb{Z}}$.

Με αυτούς τους ορισμούς, αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Για κάθε $m, n \in \omega$, ισχύει $m_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} n_{\mathbb{Z}} \longleftrightarrow m \leq n$.
- (ii) Για κάθε $m, n \in \omega$, ισχύει $-m_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} -n_{\mathbb{Z}} \longleftrightarrow n \leq m$.
- (iii) Για κάθε $m, n \in \omega$, ισχύει $-m_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} n_{\mathbb{Z}}$.
- (iv) Η διάταξη $\leq_{\mathbb{Z}}$ στο $\mathbb{Z}$ δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.
- (v) Κάθε ακέραιος αριθμός έχει (ακριβώς) έναν αμέσως επόμενο, καθώς και (ακριβώς) έναν αμέσως προηγούμενο ακέραιο αριθμό.

Λύση.

Σημειώνεται ότι, όπως και στην εξήγηση της άσκησης και όπου αυτό είναι δυνατόν, αποφεύγουμε να γράφουμε πολλούς δείκτες ώστε να είναι κάπως πιο ευανάγνωστο το κείμενο. Σε κάθε περίπτωση, οι κλάσεις ισοδυναμίας εδώ αναφέρονται στη σχέση R μέσω της οποίας ορίσαμε τους ακεραίους (από τους φυσικούς).

(i) Απευθείας από τον ορισμό της διάταξης $\leq_{\mathbb{Z}}$ έχουμε, για κάθε $m, n \in \omega$:

$$m_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} n_{\mathbb{Z}} \longleftrightarrow [\langle m, 0 \rangle] \leq_{\mathbb{Z}} [\langle n, 0 \rangle] \longleftrightarrow m + 0 \leq 0 + n \longleftrightarrow m \leq n.$$

(ii) Με αντίστοιχο τρόπο, για κάθε $m, n \in \omega$:

$$-m_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} -n_{\mathbb{Z}} \longleftrightarrow [\langle 0, m \rangle] \leq_{\mathbb{Z}} [\langle 0, n \rangle] \longleftrightarrow 0 + n \leq m + 0 \longleftrightarrow n \leq m.$$

(iii) Και πάλι από τους ορισμούς, για κάθε $m, n \in \omega$:

$$-m_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} n_{\mathbb{Z}} \longleftrightarrow [\langle 0, m \rangle] \leq_{\mathbb{Z}} [\langle n, 0 \rangle] \longleftrightarrow 0 + 0 \leq m + n \longleftrightarrow 0 \leq m + n.$$

Επειδή όμως προφανώς ισχύει $0 \leq m + n$, για κάθε $m, n \in \omega$, το ζητούμενο έπεται.

(iv) Έστω τυχόν $x \in \mathbb{Z}$, όπου $x = [\langle m, n \rangle]$ για κάποια $m, n \in \omega$. Θα βρούμε ένα στοιχείο $y \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $y <_{\mathbb{Z}} x$, από το οποίο άμεσα έπεται ότι η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ δεν έχει ελάχιστο. Για να βρούμε ένα τέτοιο y , θυμόμαστε ότι η κλάση ισοδυναμίας $[\langle m, n \rangle]$ (δηλ., το ίδιο το στοιχείο x) αναπαριστά τη «διαφορά» $m - n$. Πώς μπορούμε να κάνουμε αυτή τη διαφορά μικρότερη; Η προφανής επιλογή είναι να αυξήσουμε (π.χ., κατά 1) τη δεύτερη συντεταγμένη. Δηλαδή, έστω $y = [\langle m, n + 1 \rangle]$. Τότε, παρατηρούμε ότι:

$$y <_{\mathbb{Z}} x \longleftrightarrow [\langle m, n + 1 \rangle] <_{\mathbb{Z}} [\langle m, n \rangle] \longleftrightarrow m + n < (n + 1) + m \longleftrightarrow m + n < (m + n) + 1.$$

Και επειδή, προφανώς, η τελευταία (γνήσια) ανισότητα είναι αληθής, έπεται ότι $y <_{\mathbb{Z}} x$ που ήταν και το ζητούμενο.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο, για να δείξουμε ότι η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ δεν έχει ούτε μέγιστο, δεδομένου ενός στοιχείου $x = [\langle m, n \rangle] \in \mathbb{Z}$ (για κάποια $m, n \in \omega$) δείχνουμε ότι το στοιχείο $y' = [\langle m + 1, n \rangle] \in \mathbb{Z}$ είναι τέτοιο ώστε $x <_{\mathbb{Z}} y'$.

(v) Οι ακέραιοι y και y' που ορίστηκαν στο προηγούμενο ερώτημα είναι στην πραγματικότητα ο αμέσως προηγούμενος και ο αμέσως επόμενος, αντίστοιχα, του ακεραίου x (και ως τέτοιοι είναι μοναδικοί). Αυτό είναι εύκολο να το ελέγξετε, και αφήνεται ως άσκηση.

9. Άσκηση 3.32 (σελ. 62), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

Δείξτε ότι στο $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ δεν υπάρχει ούτε μέγιστο αλλά ούτε και ελάχιστο στοιχείο. Επίσης, δείξτε ότι αν $x, y \in \mathbb{Q}$ με $x <_{\mathbb{Q}} y$, τότε υπάρχει $z \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $x <_{\mathbb{Q}} z \wedge z <_{\mathbb{Q}} y$ (δηλαδή, δείξτε την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στον εαυτό του).

Λύση.

Σε αυτήν την άσκηση, δυστυχώς, δεν μπορούμε να αποφύγουμε τους πολλούς και επαναλαμβανόμενους δείκτες, καθώς θα αναφερθούμε τόσο σε στοιχεία του $\mathbb{Q}$ όσο και του $\mathbb{Z}$. Έτσι, όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας με δείκτη «S» αναφέρονται στη σχέση που ορίσαμε στο σύνολο $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\})$ και μέσω της οποίας ορίσαμε τους ρητούς (από τους ακεραίους). Εκείνες που έχουν δείκτη «R» αναφέρονται στη σχέση ισοδυναμίας μέσω της οποίας ορίσαμε τους ακεραίους (από τους φυσικούς).

Υπενθύμιση: όπως παρατηρήσαμε και στο μάθημα, κάθε ρητός $x \in \mathbb{Q}$ έχει S-αντιπρόσωπο $\langle a, b \rangle$ για κάποια $a, b \in \mathbb{Z}$ με $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$. Δηλαδή, μπορούμε πάντα να επιλέξουμε τον «παρονομαστή» του ρητού x να είναι θετικός ακέραιος. Μάλιστα, ορίσαμε τη διάταξη $<_{\mathbb{Q}}$ στο $\mathbb{Q}$ με χρήση αυτής της παρατήρησης.

Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $x \in \mathbb{Q}$ με $x = [\langle a, b \rangle]_S$, για κάποια $a, b \in \mathbb{Z}$ με $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$. Θα βρούμε ένα στοιχείο $y \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $y <_{\mathbb{Q}} x$, από το οποίο άμεσα έπεται ότι

η διάταξη $<_{\mathbb{Q}}$ στο $\mathbb{Q}$ δεν έχει ελάχιστο. Για να βρούμε ένα τέτοιο y , θυμόμαστε ότι η κλάση ισοδυναμίας $[(a, b)]_S$ (δηλ., το ίδιο το στοιχείο x) αναπαριστά το «λόγο» $\frac{a}{b}$. Πώς μπορούμε να κάνουμε αυτό το λόγο μικρότερο; Μιας που ο παρονομαστής είναι θετικός ακέραιος, η προφανής επιλογή είναι να κάνουμε τον αριθμητή μικρότερο, δηλαδή να μειώσουμε την πρώτη συντεταγμένη. Παρατηρήστε ότι αυτό είναι εφικτό γιατί έχουμε ήδη δείξει, στην προηγούμενη άσκηση, ότι η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ δεν έχει ελάχιστο. Για την ακρίβεια, έστω a' ο αμέσως προηγούμενος ακέραιος του ακεραίου a . Θέτουμε $y = [(a', b)]_S$. Τότε, έχουμε:

$$y <_{\mathbb{Q}} x \longleftrightarrow [(a', b)]_S <_{\mathbb{Q}} [(a, b)]_S \longleftrightarrow a' \cdot_{\mathbb{Z}} b <_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} b.$$

Χρησιμοποιώντας το ότι $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$, θα δείξουμε ότι ισχύει η τελευταία (γνήσια) ανισότητα (στο $\mathbb{Z}$), από το οποίο θα συμπεράνουμε το επιθυμητό $y <_{\mathbb{Q}} x$.

Έστω λοιπόν ότι, για τα συγκεκριμένα στοιχεία $a, b \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι $a = [(m, n)]_R$ και $b = [(k, l)]_R$, για κάποια $m, n, k, l \in \omega$. Παρατηρήστε ότι τότε $a' = [(m, n+1)]_R$, αφού ο a' (επιλέχθηκε να) είναι ο αμέσως προηγούμενος ακέραιος του a .

Επίσης, παρατηρήστε ότι αφού $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$, δηλαδή αφού $[(0, 0)]_R <_{\mathbb{Z}} [(k, l)]_R$, έπεται (από ορισμό της διάταξης στο $\mathbb{Z}$) ότι $l < k$.

Με αυτά τα δεδομένα, έχουμε (χρησιμοποιώντας και τον ορισμό του πολλ/μού στο $\mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} a' \cdot_{\mathbb{Z}} b <_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} b &\longleftrightarrow [(m, n+1)]_R \cdot_{\mathbb{Z}} [(k, l)]_R <_{\mathbb{Z}} [(m, n)]_R \cdot_{\mathbb{Z}} [(k, l)]_R \longleftrightarrow \\ &[(mk + nl + l, ml + nk + k)]_R <_{\mathbb{Z}} [(mk + nl, ml + nk)]_R \longleftrightarrow \\ &(mk + nl + l) + (ml + nk) < (ml + nk + k) + (mk + nl) \longleftrightarrow \\ &(mk + nl + ml + nk) + l < (mk + nl + ml + nk) + k \longleftrightarrow \\ &l < k, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει λόγω της υπόθεσης $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$. Συμπεραίνουμε ότι $a' \cdot_{\mathbb{Z}} b <_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} b$ και, άρα, $y <_{\mathbb{Q}} x$ που είναι και το ζητούμενο.

Παρατήρηση:

Παρατηρήστε ότι η ιδέα της παραπάνω απόδειξης είναι εντελώς προφανής και αναμενόμενη: για να βρούμε έναν ρητό μικρότερο από τον ρητό $\frac{a}{b}$, όπου $b > 0$, απλά θεωρούμε τον ρητό $\frac{a-1}{b}$. Αυτό ακριβώς είναι αυτό που κάναμε παραπάνω. Οι κουραστικές λεπτομέρειες και οι δυσανάγνωστοι συμβολισμοί που υπεισέρχονται, και οι οποίοι οφείλονται απλά στον τρόπο μέσω του οποίου ορίσαμε αυστηρά τα $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ αντίστοιχα, δεν πρέπει σε καμία περίπτωση να επισκιάσουν αυτήν την απλούστατη και προφανή ιδέα της απόδειξης.

Το να δείξουμε ότι η διάταξη $<_{\mathbb{Q}}$ στο $\mathbb{Q}$ δεν έχει ούτε μέγιστο είναι εντελώς ανάλογο. Όπως μάλλον φαντάζεστε, αυτήν τη φορά αυξάνουμε τον αριθμητή του λόγου, θεωρώντας, π.χ., τον αμέσως επόμενο του ακέραιο (δηλ., θεωρούμε τον ρητό $\frac{a+1}{b}$). Για δική σας εξάσκηση, προτείνω ισχυρά να καταγράψετε λεπτομερώς αυτήν την απόδειξη μόνοι σας.

Δείχνουμε, τέλος, ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στον εαυτό του (ως προς τη διάταξη $<_{\mathbb{Q}}$).

Έστω $x, y \in \mathbb{Q}$ με $x <_{\mathbb{Q}} y$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υπάρχουν $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ με $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$ και $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} d$, τέτοια ώστε $x = [(a, b)]_S$ και $y = [(c, d)]_S$ (δηλαδή, επιλέγουμε και πάλι τους παρονομαστές να είναι θετικοί ακέραιοι).

Θέλουμε να βρούμε κάποιον ακέραιο $z = [(u, v)]_S \in \mathbb{Q}$ (με $u, v \in \mathbb{Z}$ και $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} v$) τέτοιον ώστε $x <_{\mathbb{Q}} z \wedge z <_{\mathbb{Q}} y$. Η ιδέα είναι και πάλι προφανής και αναμενόμενη: για τους δεδομένους

ρητούς $x = \frac{a}{b}$ και $y = \frac{c}{d}$, οι οποίοι ισοδύναμα γράφονται ως $x = \frac{ad}{bd}$ και $y = \frac{bc}{bd}$ αντίστοιχα, επιλέγουμε το μέσον του διαστήματός τους, δηλαδή τον ρητό $z = \frac{ad+bc}{2bd}$. Δηλαδή, κυριολεκτικά, θέτουμε $u = a \cdot \mathbb{Z} d + \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} c$ και $v = 2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} d$, οπότε:

$$z = [\langle a \cdot \mathbb{Z} d + \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} c, 2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} d \rangle]_S \in \mathbb{Q}.$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} v$ (μιας που $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$ και $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} d$, και φυσικά $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}$).

Ελέγχουμε (υπομονετικά) ότι όντως $x <_{\mathbb{Q}} z \wedge z <_{\mathbb{Q}} y$. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε όλες τις λεπτομέρειες, για να δείξουμε, για παράδειγμα, την πρώτη ανισότητα, έχουμε:

$$x <_{\mathbb{Q}} z \iff 2\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} a \cdot \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} d <_{\mathbb{Z}} a \cdot \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} d + \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} c \iff$$

$$a \cdot \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} d <_{\mathbb{Z}} b \cdot \mathbb{Z} b \cdot \mathbb{Z} c \iff a \cdot \mathbb{Z} d <_{\mathbb{Z}} b \cdot \mathbb{Z} c \iff x <_{\mathbb{Q}} y,$$

με την τελευταία ανισότητα να ισχύει εξ υποθέσεως. Άρα, για τον συγκεκριμένο ρητό z , όπως τον ορίσαμε, έχουμε ότι $x <_{\mathbb{Q}} z$. Με εντελώς ανάλογο τρόπο δείχνουμε και ότι $z <_{\mathbb{Q}} y$.

Σημειώνεται ότι οι διάφορες ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης στους ακεραίους που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω (όπως, π.χ., η ιδιότητα της διαγραφής, τόσο για την πρόσθεση, όσο και για τον πολλαπλασιασμό με θετικό ακέραιο) είναι εύκολο να αποδειχθούν και άρα αφήνονται ως άσκηση.

10. Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο τομών Dedekind (δηλαδή, κάθε στοιχείο του X είναι τομή Dedekind). Δείξτε ότι είτε $\bigcup X = \mathbb{Q}$ ή το σύνολο $\bigcup X$ είναι κι αυτό τομή Dedekind.

Παρατηρήστε επίσης ότι η διάζευξη είναι αποκλειστική: δεν μπορούν να συμβαίνουν και τα δύο ταυτόχρονα.

Λύση.

Έστω ότι $X \neq \emptyset$ είναι ένα σύνολο τομών Dedekind και έστω ότι $\bigcup X \neq \mathbb{Q}$. Θα δείξουμε ότι το $\bigcup X$ είναι κι αυτό τομή Dedekind.

Κατ' αρχάς, το ότι $\bigcup X \subseteq \mathbb{Q}$ με $\emptyset \neq \bigcup X \neq \mathbb{Q}$ είναι ήδη σαφές (θυμηθείτε ότι $X \neq \emptyset$ αλλά και ότι κάθε στοιχείο του X είναι μη κενό).

Έστω $q \in \bigcup X$ και έστω $p \in \mathbb{Q}$ με $p <_{\mathbb{Q}} q$. Θα δείξουμε ότι και $p \in \bigcup X$. Επειδή $q \in \bigcup X$, υπάρχει κάποια τομή Dedekind $z \in X$ τέτοια ώστε $q \in z$. Αφού όμως $p <_{\mathbb{Q}} q$, έπεται ότι και $p \in z$ και άρα $p \in \bigcup X$.

Τέλος, έστω $q \in \bigcup X$. Έστω κάποια τομή Dedekind $z \in X$ τέτοια ώστε $q \in z$. Επειδή το z δεν έχει μέγιστο, υπάρχει $p \in z$ με $q <_{\mathbb{Q}} p$. Έπεται ότι $p \in \bigcup X$ και $q <_{\mathbb{Q}} p$, το οποίο δείχνει ότι το $\bigcup X$ δεν έχει μέγιστο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

- A. Αν x και y είναι τομές Dedekind, δείξτε ότι και το ακόλουθο σύνολο:

$$\{a +_{\mathbb{Q}} b : a \in x \wedge b \in y\},$$

είναι τομή Dedekind (κάτι που δείχνει ότι η πρόσθεση $x +_{\mathbb{R}} y$ στους πραγματικούς είναι καλώς ορισμένη).

Λύση.

Έστω $z = \{a +_{\mathbb{Q}} b : a \in x \wedge b \in y\}$. Δείχνουμε ότι το z είναι τομή Dedekind.

- Το ότι $z \neq \emptyset$ είναι άμεσο από το γεγονός ότι τόσο $x \neq \emptyset$ όσο και $y \neq \emptyset$. Δηλαδή, έστω κάποιο $a \in x$ και κάποιο $b \in y$. Τότε, $a +_{\mathbb{Q}} b \in \mathbb{Q}$ και $a +_{\mathbb{Q}} b \in z$.
- $z \neq \mathbb{Q}$: αφού τα x και y είναι τομές Dedekind, έχουμε ότι τόσο $x \neq \mathbb{Q}$ όσο και $y \neq \mathbb{Q}$. Έστω $p, q \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $p \notin x$ και $q \notin y$. Θα δείξουμε ότι $p +_{\mathbb{Q}} q \notin z$, το οποίο είναι αρκετό.

Αφού $p \notin x$, και αφού το x είναι τομή Dedekind (και, άρα, «κλειστό προς τα αριστερά»), έχουμε ότι, για κάθε $a \in x$, ισχύει ότι $a <_{\mathbb{Q}} p$.

Με ανάλογο τρόπο, αφού $q \notin y$, και αφού το y είναι τομή Dedekind, έχουμε ότι, για κάθε $b \in y$, ισχύει ότι $b <_{\mathbb{Q}} q$.

Επομένως, για κάθε $a \in x$ και για κάθε $b \in y$, έχουμε ότι $a +_{\mathbb{Q}} b <_{\mathbb{Q}} p +_{\mathbb{Q}} q$. Από αυτό έπεται ότι $p +_{\mathbb{Q}} q \notin z$, και άρα $z \neq \mathbb{Q}$.

- Έστω $q \in z$ και έστω $p \in \mathbb{Q}$ με $p <_{\mathbb{Q}} q$. Θα δείξουμε ότι $p \in z$ (το οποίο δείχνει ότι το z είναι όντως «κλειστό προς τα αριστερά»). Έστω $a \in x$ και $b \in y$ τέτοια ώστε $q = a +_{\mathbb{Q}} b$. Δηλαδή, έχουμε ότι $p <_{\mathbb{Q}} a +_{\mathbb{Q}} b = q$.

Ας υποθέσουμε, προς στιγμήν, ότι μπορούμε να βρούμε κάποιο $a' \in \mathbb{Q}$ με $a' <_{\mathbb{Q}} a$, τέτοιο ώστε $p <_{\mathbb{Q}} a' +_{\mathbb{Q}} b$. Τότε, θα έχουμε τα εξής. Αρχικά, αφού $a' <_{\mathbb{Q}} a$ και $a \in x$, έπεται ότι $a' \in x$. Κατόπιν, αφού $p -_{\mathbb{Q}} a' <_{\mathbb{Q}} b$ και $b \in y$, έπεται ότι $p -_{\mathbb{Q}} a' \in y$ (όπου το σύμβολο « $-_{\mathbb{Q}}$ » αναφέρεται στην αφαίρεση στους ρητούς). Τότε, άμεσα θα έχουμε ότι:

$$a' +_{\mathbb{Q}} (p -_{\mathbb{Q}} a') \in z,$$

δηλαδή $p \in z$ που είναι και το ζητούμενο.

Το μόνο που μένει λοιπόν είναι να βρούμε ένα $a' \in \mathbb{Q}$ με $a' <_{\mathbb{Q}} a$, τέτοιο ώστε $p <_{\mathbb{Q}} a' +_{\mathbb{Q}} b$. Αυτό θα το βρούμε με απευθείας απλούς υπολογισμούς (αν φτιάξετε ένα πρόχειρο σχήμα, θα σας βοηθήσει να δείτε την ιδέα αυτών των υπολογισμών). Έχουμε ότι $p <_{\mathbb{Q}} a +_{\mathbb{Q}} b$. Επομένως, $0_{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{Q}} a +_{\mathbb{Q}} b -_{\mathbb{Q}} p$. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στον εαυτό του, υπάρχει κάποιο $c \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $0_{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{Q}} c <_{\mathbb{Q}} a +_{\mathbb{Q}} b -_{\mathbb{Q}} p$. Θέτουμε $a' = a -_{\mathbb{Q}} c$, όπου προφανώς $a' <_{\mathbb{Q}} a$. Είναι εύκολο να δείτε ότι και $p <_{\mathbb{Q}} a' +_{\mathbb{Q}} b$. Επομένως το $a' = a -_{\mathbb{Q}} c$ δουλεύει ακριβώς όπως θέλαμε.

- Τέλος, δείχνουμε ότι το σύνολο z δεν έχει μέγιστο. Έστω $q \in z$, όπου $q = a +_{\mathbb{Q}} b$ για κάποια $a \in x$ και $b \in y$. Αφού τα x και y είναι τομές Dedekind, και άρα κανένα εξ αυτών δεν έχει μέγιστο, έπεται ότι υπάρχουν $a' \in x$ και $b' \in y$ τέτοια ώστε $a <_{\mathbb{Q}} a'$ και $b <_{\mathbb{Q}} b'$, αντίστοιχα. Τότε, προφανώς έχουμε ότι $a' +_{\mathbb{Q}} b' \in z$, και επίσης:

$$q = a +_{\mathbb{Q}} b <_{\mathbb{Q}} a' +_{\mathbb{Q}} b',$$

που είναι και το ζητούμενο.

- B.** Έστω $\mathcal{X} \neq \emptyset$ ένα **άνω** φραγμένο σύνολο τομών Dedekind (δηλαδή, κάθε στοιχείο του $\mathcal{X}$ είναι τομή Dedekind, και το σύνολο $\mathcal{X}$ έχει άνω φράγμα). Δείξτε ότι $\bigcup \mathcal{X}$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\mathcal{X}$.

Λύση.

Αφού, εξ υποθέσεως, το σύνολο $\mathcal{X}$ έχει άνω φράγμα, υπάρχει τομή Dedekind z τέτοια ώστε $r \subseteq z$, για κάθε $r \in \mathcal{X}$. Όμως το z είναι τομή Dedekind, οπότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q} \setminus z$. Έπεται ότι $q \notin \bigcup \mathcal{X}$ και επομένως $\bigcup \mathcal{X} \neq \mathbb{Q}$, δηλαδή, από την Άσκηση 10 παραπάνω, το $\bigcup \mathcal{X}$ είναι τομή Dedekind.

Το ότι το $\bigcup \mathcal{X}$ είναι άνω φράγμα του $\mathcal{X}$ είναι άμεσο: αν $r \in \mathcal{X}$, τότε $r \subseteq \bigcup \mathcal{X}$ εξ ορισμού της ένωσης.

Για να δείξουμε ότι το $\bigcup X$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X , θεωρούμε ένα οποιοδήποτε άνω φράγμα z του X . Για κάθε $r \in X$, έχουμε ότι $r \subseteq z$, και επομένως $\bigcup X \subseteq z$, το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Γ. Αποδείξτε το Λήμμα της σελίδας 55 από τις σημειώσεις του Σκανδάλη, σχετικά με τις ιδιότητες της συνάρτησης $T : \omega \rightarrow \omega$.

Λύση.

Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση $T : \omega \rightarrow \omega$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $T(0) = 0$ και, για κάθε $n \in \omega$:

$$T(n+1) = T(n) + n + 1.$$

(i) Για να δείξουμε ότι η T είναι γνησίως αύξουσα, αρχικά δείχνουμε την εξής βοηθητική ιδιότητα: για κάθε $n \in \omega$, ισχύει ότι $T(n) < T(n+1)$. Αυτό το δείχνουμε με την ακόλουθη απλή επαγωγή.

- Για $n = 0$, με απλό υπολογισμό έχουμε ότι $T(0) = 0 < 1 = T(1)$.
- Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $n \in \omega$, ισχύει ότι $T(n) < T(n+1)$. Τότε, έχουμε:

$$T(n+1) = T(n) + n + 1 < T(n+1) + n + 1 < T(n+1) + (n+1) + 1 = T((n+1)+1).$$

Δεδομένου αυτού, δείχνουμε τώρα με επαγωγή στο n ότι, για κάθε $m, n \in \omega$, ισχύει ότι $m < n \rightarrow T(m) < T(n)$.

- Για $n = 0$, η συνεπαγωγή ισχύει τετριμμένα (αφού η προκείμενη είναι ψευδής).
- Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $n \in \omega$, ισχύει ότι $m < n \rightarrow T(m) < T(n)$. Έστω κάποιο $m < n+1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
 - (α) Αν $m < n$, τότε η επαγωγική υπόθεση συνεπάγεται ότι $T(m) < T(n)$ και, επομένως, $T(m) < T(n+1)$ (αφού δείξαμε παραπάνω ότι $T(n) < T(n+1)$).
 - (β) Αν $m = n$, πάλι από την ιδιότητα που δείξαμε παραπάνω έχουμε άμεσα ότι $T(m) < T(n+1)$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $T(m) < T(n+1)$, που είναι και το ζητούμενο.

(ii) Αφού η T είναι γνησίως αύξουσα έχουμε άμεσα ότι η T είναι και 1-1.

(iii) Για να δείξουμε την επιθυμητή ιδιότητα, θεωρούμε το εξής σύνολο:

$$A = \{y \in \omega : \exists x \in \omega (T(x) \leq y < T(x+1))\}.$$

Θα δείξουμε ότι το A είναι επαγωγικό, από το οποίο έπεται άμεσα το ζητούμενο.

Αρχικά, είναι εύκολο να δούμε ότι $0 \in A$: $T(0) = 0 \leq 0 < 1 = T(1)$ (δηλαδή, επιλέγουμε $x = 0$).

Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $y \in \omega$, ισχύει ότι $y \in A$, δηλαδή, υπάρχει $x \in \omega$ τέτοιο ώστε $T(x) \leq y < T(x+1)$. Θα δείξουμε ότι $y+1 \in A$. Παρατηρήστε ότι, αφού $y < T(x+1)$, έχουμε ότι $y+1 \leq T(x+1)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $y+1 = T(x+1)$, τότε έχουμε ότι $T(x+1) = y+1 < T((x+1)+1)$, όπου η ανισότητα προκύπτει από το ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Με άλλα λόγια, θεωρώντας τον φυσικό αριθμό $x+1$, έχουμε ότι:

$$T(x+1) \leq y+1 < T((x+1)+1),$$

και άρα $y+1 \in A$.

(β) Αν $y+1 < T(x+1)$, τότε άμεσα έχουμε ότι $T(x) \leq y+1 < T(x+1)$ (δηλαδή, ο ίδιος φυσικός αριθμός x δουλεύει και για το $y+1$). Επομένως, $y+1 \in A$.

Σε κάθε περίπτωση, δείξαμε ότι $y+1 \in A$ και άρα το A είναι επαγωγικό. Με άλλα λόγια, έχουμε ότι $A = \omega$ που είναι και το ζητούμενο.