

3η Σειρά Ασκήσεων

ΛΥΣΕΙΣ

1. Χρησιμοποιώντας την Αρχή του Περιστερώνα για τους φυσικούς αριθμούς, δείξτε ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο A και για κάθε $f : A \rightarrow A$, αν η f είναι 1-1 τότε η f είναι και επί του A .

Λύση.

Ακολουθούμε πιστά την υπόδειξη της άσκησης.

Έστω λοιπόν ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο A και μία συνάρτηση $f : A \xrightarrow{1-1} A$. Θα δείξουμε ότι η f είναι επί του A . Εφόσον το A είναι πεπερασμένο, υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη $\pi : A \xrightarrow[επί]{1-1} n$, για κάποιο $n \in \omega$.

Χρησιμοποιώντας τις f και π και την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων, ορίζουμε τη συνάρτηση $g : n \xrightarrow{1-1} n$ ως εξής. Για κάθε $i \in n$, θέτουμε $g(i) = \pi \circ f \circ \pi^{-1}(i)$. Με άλλα λόγια, $g = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$. Για να εξηγήσουμε αυτήν την επιλογή, ας δούμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο απεικονίζονται τα δεδομένα του προβλήματος:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ n & & n \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι για να ορίσουμε μία συνάρτηση από το n στον εαυτό του, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα υπάρχοντα βέλη, δηλαδή, τις συναρτήσεις f και π , καθώς και την αντίστροφη π^{-1} (η οποία είναι 1-1 και επί, μιας που η π είναι 1-1 και επί). Οπότε, ολοκληρώνουμε το διάγραμμα ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ \pi^{-1} \uparrow & & \downarrow \pi \\ n & \xrightarrow{g = \pi \circ f \circ \pi^{-1}} & n \end{array}$$

και τώρα είναι σαφές το γιατί ορίσαμε $g = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$.

Προκύπτει άμεσα ότι η $g : n \rightarrow n$ είναι 1-1 (ως σύνθεση 1-1 συναρτήσεων). Επομένως, από την Αρχή του Περιστερώνα, έπεται πως η g είναι και επί του n .

Μένει να δείξουμε ότι η f είναι επί του A . Για αυτό, έστω κάποιο $y \in A$. Θα βρούμε $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Για να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία ότι η g είναι επί του n , θεωρούμε την εικόνα $\pi(y)$ του στοιχείου y . Προφανώς, $\pi(y) \in n$. Αφού η g είναι επί, υπάρχει κάποιο $i \in n$ τέτοιο ώστε

$g(i) = \pi(y)$. Με άλλα λόγια, από ορισμό της g , έχουμε ότι $\pi(f(\pi^{-1}(i))) = \pi(y)$. Όμως, επειδή η π είναι 1-1, έπεται ότι $f(\pi^{-1}(i)) = y$. Δηλαδή, το στοιχείο $x = \pi^{-1}(i) \in A$ είναι αυτό που ψάχνουμε.

Σημείωση: έχοντας δείξει ότι η $g : n \rightarrow n$ είναι 1-1 και επί, ένας λίγο πιο σύντομος τρόπος να ολοκληρώσουμε την απόδειξη είναι ο ακόλουθος. Παρατηρούμε ότι $f = \pi^{-1} \circ g \circ \pi$ και άρα η f είναι 1-1 και επί ως σύνθεση 1-1 και επί συναρτήσεων.

2. Δείξτε, με επαγωγή στο m , ότι για κάθε $n, m \in \omega$, ισχύει ότι $n \times m \sim n \cdot m$.

Λύση. Για $m = 0 = \emptyset$, και για κάθε $n \in \omega$, έχουμε ότι $n \times \emptyset = \emptyset = 0 = n \cdot 0$.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $m \in \omega$, έχουμε ότι $n \times m \sim n \cdot m$, για κάθε $n \in \omega$. Θα δείξουμε ότι $n \times m^+ \sim n \cdot m^+$, για κάθε $n \in \omega$.

Έστω $n \in \omega$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $n \times m^+ = n \times (m \cup \{m\}) = (n \times m) \cup (n \times \{m\})$. Επίσης, από αναδρομικό ορισμό του πολλαπλασιασμού στους φυσικούς, $n \cdot m^+ = (n \cdot m) + n$.

Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $f : n \times m \xrightarrow[επί]{1-1} n \cdot m$. Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι $n \times \{m\} \sim n$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $g : n \times \{m\} \xrightarrow[επί]{1-1} n$, όπου, για κάθε $i < n$, θέτουμε $g(\langle i, m \rangle) = i$, επιβεβαιώνει ότι $n \times \{m\} \sim n$.

Τέλος, επειδή $m \notin m$, έχουμε ότι $(n \times m) \cap (n \times \{m\}) = \emptyset$ (δηλαδή, τα σύνολα $n \times m$ και $n \times \{m\}$ είναι ξένα μεταξύ τους).

Με τα παραπάνω δεδομένα, ορίζουμε τη συνάρτηση $h : (n \times m) \cup (n \times \{m\}) \rightarrow (n \cdot m) + n$ ως εξής:

$$\forall x \in (n \times m) \cup (n \times \{m\}) : \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{αν } x \in n \times m \\ (n \cdot m) + g(x) & , \text{αν } x \in n \times \{m\} \end{cases}$$

και ελέγχεται εύκολα ότι η h είναι 1-1 και επί, επιβεβαιώνοντας ότι $n \times m^+ \sim n \cdot m^+$, που είναι και το ζητούμενο.

3. Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο πεπερασμένων συνόλων (δηλαδή, κάθε στοιχείο του A είναι πεπερασμένο σύνολο). Δείξτε ότι το $\bigcup A$ είναι πεπερασμένο.

Λύση.

Σύμφωνα με την υπόδειξη της άσκησης, κάνουμε επαγωγή στο n , όπου $A \sim n$ (δηλαδή, επαγωγή στην πληθικότητα του A).

Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν $n = 0$ ή αν $n = 1$, τότε το συμπέρασμα έπεται άμεσα: αν $n = 0$, τότε $A = \emptyset$ και άρα $\bigcup A = \emptyset$. αν $n = 1$, τότε $A = \{x\}$ για κάποιο (πεπερασμένο) σύνολο x , και άρα $\bigcup A = \bigcup \{x\} = x$. Και στις δύο περιπτώσεις, το $\bigcup A$ είναι πεπερασμένο.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $n \in \omega$, το ζητούμενο ισχύει. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι αν A είναι πεπερασμένο σύνολο πεπερασμένων συνόλων με $A \sim n$, τότε το $\bigcup A$ είναι επίσης πεπερασμένο.

Έστω τώρα A κάποιο πεπερασμένο σύνολο πεπερασμένων συνόλων τέτοιο ώστε $A \sim n^+$, και έστω μία συνάρτηση $f : n^+ \xrightarrow[επί]{1-1} A$. Θα δείξουμε ότι το $\bigcup A$ είναι επίσης πεπερασμένο.

Για να καταφύγουμε στην επαγωγική υπόθεση, θεωρούμε τον περιορισμό της συνάρτησης f στο σύνολο n , δηλαδή τη συνάρτηση $g = f \upharpoonright n = f \setminus \{\langle n, f(n) \rangle\}$. Παρατηρούμε ότι $g : n \xrightarrow[επί]{1-1} A \setminus \{f(n)\}$, δηλαδή η g φανερώνει την ισοπληθικότητα $A \setminus \{f(n)\} \sim n$. Με άλλα

λόγια, μόλις δείξαμε ότι το $A \setminus \{f(n)\}$ έχει πληθικότητα n . Άρα, και αφού προφανώς το $A \setminus \{f(n)\}$ είναι σύνολο πεπερασμένων συνόλων, έχουμε από επαγωγική υπόθεση πως το $\bigcup (A \setminus \{f(n)\})$ είναι πεπερασμένο.

Για να τελειώσουμε την απόδειξη, υπενθυμίζουμε ότι το $f(n)$ είναι πεπερασμένο σύνολο (μιας που $f(n) \in A$), ενώ (προφανώς) ισχύει και ότι $A = (A \setminus \{f(n)\}) \cup \{f(n)\}$. Έτσι, έχουμε ότι:

$$\bigcup A = \bigcup \left((A \setminus \{f(n)\}) \cup \{f(n)\} \right) = \left(\bigcup (A \setminus \{f(n)\}) \right) \cup \bigcup \{f(n)\} = \left(\bigcup (A \setminus \{f(n)\}) \right) \cup f(n),$$

και άρα το $\bigcup A$ είναι πεπερασμένο σύνολο, μιας που είναι ίσο με την ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων.

4. Άσκηση 4.2 (σελ. 85), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

Λύση.

i) Έστω σύνολο A και έστω $B \subseteq A$ και $C \subseteq A$ με $B \neq C$. Αφού τα δύο υποσύνολα B και C δεν είναι ίσα, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε πως υπάρχει κάποιο στοιχείο $x \in A$ τέτοιο ώστε $x \in B \setminus C$ (η περίπτωση $x \in C \setminus B$ είναι εντελώς ανάλογη).

Όμως τότε θα έχουμε ότι $\chi_B(x) = 1$ αλλά $\chi_C(x) = 0$. Επομένως, οι συναρτήσεις χ_B και χ_C είναι διαφορετικές, δηλαδή $\chi_B \neq \chi_C$.

ii) Έστω $f : A \rightarrow \{0, 1\}$. Θα βρούμε κάποιο $B \subseteq A$ τέτοιο ώστε $f = \chi_B$. Θεωρούμε το εξής σύνολο:

$$B = \{x \in A : f(x) = 1\}.$$

Προφανώς ισχύει ότι $B \subseteq A$. Επίσης, παρατηρήστε ότι για κάθε $x \in A$, έχουμε ότι:

$$f(x) = 1 \iff x \in B \iff \chi_B(x) = 1,$$

όπου η πρώτη ισοδυναμία ισχύει από τον ορισμό του συνόλου B που θεωρήσαμε παραπάνω, ενώ η δεύτερη ισοδυναμία ισχύει από τον ορισμό της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Επομένως, $f = \chi_B$ που είναι και το ζητούμενο.

Με βάση τα παραπάνω, για οποιοδήποτε σύνολο A θα δείξουμε ότι $\mathcal{P}(A) \sim {}^A\{0, 1\}$. Για αυτό, αρκεί να ορίσουμε μία συνάρτηση $G : \mathcal{P}(A) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} {}^A\{0, 1\}$.

Η προφανής επιλογή για την G είναι, δεδομένου ενός υποσυνόλου $B \subseteq A$, να θέσουμε $G(B) = \chi_B$. Με άλλα λόγια, στέλνουμε το τυχόν υποσύνολο $B \subseteq A$ στην χαρακτηριστική του συνάρτηση χ_B .

Από το ερώτημα i) παραπάνω έπεται άμεσα ότι η G είναι 1-1. Επίσης, από το ερώτημα ii) παραπάνω έπεται άμεσα ότι η G είναι επί. Επομένως $\mathcal{P}(A) \sim {}^A\{0, 1\}$.

5. Θυμηθείτε ότι στο μάθημα ορίσαμε τη συνάρτηση $F : {}^\omega\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ως ακολούθως: για κάθε $\alpha \in {}^\omega\{0, 1\}$, όπου η άπειρη δυαδική ακολουθία α είναι της μορφής $\alpha = (a_n)_{n \in \omega}$, με $a_n \in \{0, 1\}$ για κάθε $n \in \omega$, θέτουμε

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}}.$$

Αρχικά, εξηγήστε γιατί η συνάρτηση F είναι καλώς ορισμένη.

Επιπλέον, δείξτε ότι η F είναι μία 1-1 συνάρτηση από το σύνολο ${}^\omega\{0, 1\}$ στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Λύση. Αρχικά, εξηγούμε γιατί η συνάρτηση F είναι καλώς ορισμένη, δηλαδή εξηγούμε γιατί η παραπάνω άπειρη σειρά συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό, για κάθε $\alpha \in {}^\omega\{0, 1\}$. Για αυτό, θεωρούμε την ακόλουθη σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}},$$

η οποία προφανώς συγκλίνει (και μάλιστα το άθροισμά της είναι ίσο με 1). Επίσης, για κάθε $\alpha \in {}^\omega\{0, 1\}$ με $\alpha = (a_n)_{n \in \omega}$, και για κάθε $n \in \omega$, έχουμε ότι:

$$0 \leq \frac{2a_n}{3^{n+1}} \leq \frac{2}{3^{n+1}},$$

το οποίο ισχύει επειδή $a_n \in \{0, 1\}$. Επομένως, από κριτήριο σύγκρισης, έπεται πως και η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$$

συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως), όπου $a_n \in \{0, 1\}$ για κάθε $n \in \omega$. Με άλλα λόγια, για κάθε $\alpha \in {}^\omega\{0, 1\}$ έχουμε ότι το $F(\alpha)$ είναι όντως (μονοσήμαντα) ορισμένο και ίσο με κάποιον πραγματικό αριθμό, και άρα η συνάρτηση F είναι καλώς ορισμένη.

Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση F είναι 1-1, θεωρούμε δύο στοιχεία $\alpha, \beta \in {}^\omega\{0, 1\}$ με $\alpha \neq \beta$ και θα δείξουμε ότι $F(\alpha) \neq F(\beta)$. Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι οι δύο άπειρες δυαδικές ακολουθίες α και β είναι της μορφής $\alpha = (a_n)_{n \in \omega}$ και $\beta = (b_n)_{n \in \omega}$, με $a_n, b_n \in \{0, 1\}$ για κάθε $n \in \omega$.

Αφού $\alpha \neq \beta$, έπεται πως υπάρχει **ελάχιστος φυσικός αριθμός** $k \in \omega$ τέτοιος ώστε $a_k \neq b_k$ (δηλαδή, k είναι ο ελάχιστος δείκτης για τον οποίο τα αντίστοιχα ψηφία των δύο άπειρων δυαδικών ακολουθιών διαφέρουν). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε πως $a_k = 1$ και $b_k = 0$ (αν $a_k = 0$ και $b_k = 1$ το επιχείρημα είναι εντελώς ανάλογο). Επίσης, επειδή $k \in \omega$ είναι ο ελάχιστος δείκτης διαφωνίας, έπεται ότι $a_n = b_n$ για κάθε $n < k$. Με αυτά τα δεδομένα, έχουμε:

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}} = \left(\sum_{n < k} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \right) + \frac{2a_k}{3^{k+1}} + \sum_{n > k} \frac{2a_n}{3^{n+1}} = \left(\sum_{n < k} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \right) + \frac{2}{3^{k+1}} + \sum_{n > k} \frac{2a_n}{3^{n+1}},$$

ενώ

$$F(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2b_n}{3^{n+1}} = \left(\sum_{n < k} \frac{2b_n}{3^{n+1}} \right) + \frac{2b_k}{3^{k+1}} + \sum_{n > k} \frac{2b_n}{3^{n+1}} = \left(\sum_{n < k} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \right) + \sum_{n > k} \frac{2b_n}{3^{n+1}}.$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που $k = 0$, τότε τα αρχικά πεπερασμένα αθροίσματα απλά εξαφανίζονται (καθώς το $\{n \in \omega : n < 0\}$ είναι κενό). Θα δείξουμε ότι $F(\alpha) > F(\beta)$. Για αυτό, θα βρούμε πρώτα ένα (άνω) φράγμα για τα άπειρα αθροίσματα πάνω από τους δείκτες $n > k$ που εμφανίζονται στους παραπάνω τύπους. Επειδή $a_n, b_n \in \{0, 1\}$ για κάθε $n \in \omega$, έχουμε:

$$\sum_{n > k} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \leq \sum_{n > k} \frac{2}{3^{n+1}} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{\frac{2}{3^{k+2}}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^{k+1}},$$

και, ομοίως:

$$\sum_{n > k} \frac{2b_n}{3^{n+1}} \leq \sum_{n > k} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^{k+1}}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\sum_{n>k} \frac{2b_n}{3^{n+1}} \leq \frac{1}{3^{k+1}} < \frac{2}{3^{k+1}} \leq \frac{2}{3^{k+1}} + \sum_{n>k} \frac{2a_n}{3^{n+1}},$$

από το οποίο προκύπτει άμεσα πως $F(\beta) < F(\alpha)$.

6. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Αποδείξτε τις παρακάτω ισοπληθικότητες:

- (i) $(0, 1) \sim (0, 1]$.
- (ii) $(x, y) \sim (0, 1]$.
- (iii) $(0, 1) \sim \mathbb{R}$.

Λύση.

- (i) Υπάρχουν διάφορες λύσεις αυτής της άσκησης, αλλά αυτό που εγώ είχα κατά νου είναι ο απευθείας ορισμός μιας αμφιμονοσήμαντης $f : (0, 1] \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} (0, 1)$. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: παρατηρούμε αρχικά ότι το σύνολο των ρητών αριθμών του διαστήματος $(0, 1)$, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$, είναι αριθμήσιμο. Οπότε, έστω $\{q_n : n \in \omega\}$ μία οποιαδήποτε απαρίθμηση αυτού, δηλαδή:

$$\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{q_n : n \in \omega\}.$$

Τότε, ορίζουμε τη ζητούμενη $f : (0, 1] \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} (0, 1)$, ως εξής. Για κάθε $x \in (0, 1]$, θέτουμε:

$$f(x) = \begin{cases} q_0 & , \text{αν } x = 1 \\ q_{n+1} & , \text{αν } x = q_n, \text{ για κάποιο } n \in \omega \\ x & , \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, στέλνουμε το επιπλέον στοιχείο, δηλαδή το δεξί άκρο 1 του διαστήματος $(0, 1]$, στον πρώτο ρητό της δεδομένης απαρίθμησης, ενώ μετακινούμε κάθε ρητό του $(0, 1)$ στον επόμενο ρητό αυτής της απαρίθμησης. Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του διαστήματος $(0, 1]$ τα στέλνουμε στον εαυτό τους.

- (ii) Για οποιαδήποτε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f : (0, 1) \longrightarrow (x, y)$ ως εξής. Για κάθε $a \in (0, 1)$, θέτουμε $f(a) = (y - x) \cdot a + x$. Είναι πολύ εύκολο να δείτε ότι η f είναι 1-1 και επί. Επομένως, $(0, 1) \sim (x, y)$. Λόγω μεταβατικότητας της ισοπληθικότητας, και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα, συμπεραίνουμε τελικά ότι $(x, y) \sim (0, 1]$, που είναι και το ζητούμενο.
- (iii) Και πάλι, υπάρχουν διάφοροι εναλλακτικοί τρόποι απόδειξης. Μία πιθανή λύση είναι η εξής. Από τα προηγούμενα δύο ερωτήματα (και από μεταβατικότητα της ισοπληθικότητας), έπεται ότι

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim (0, 1).$$

Επίσης, η συνάρτηση $f(x) = \tan x$, ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι της μορφής $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{R}$, και άρα επιβεβαιώνει την ισοπληθικότητα

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, έπεται ότι $(0, 1) \sim \mathbb{R}$.

7. Άσκηση 4.18 (σελ. 86), από τις σημειώσεις του Σκανδάλη.

Λύση. Έστω σύνολα A_1, A_2, B_1, B_2 τέτοια ώστε $A_1 \sim A_2$ και $B_1 \sim B_2$. Έστω συναρτήσεις $f : A_1 \xrightarrow[επί]{1-1} A_2$ και $g : B_1 \xrightarrow[επί]{1-1} B_2$ οι οποίες επιβεβαιώνουν τις αντίστοιχες δεδομένες ισοπληθικότητες.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : A_1 \times B_1 \longrightarrow A_2 \times B_2$ ως εξής. Για κάθε $x \in A_1$ και κάθε $y \in B_1$, θέτουμε:

$$h(\langle x, y \rangle) = \langle f(x), g(y) \rangle.$$

Είναι εύκολο να δείτε, δεδομένων των αντίστοιχων ιδιοτήτων των f και g , πως η συνάρτηση h που μόλις ορίσαμε είναι 1-1 και επί. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$, που είναι και το ζητούμενο.

8. **Χωρίς χρήση πληθαρθμικών**, δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A και B , αν $A \sim B$, τότε $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

Λύση. Έστω δεδομένη συνάρτηση $f : A \xrightarrow[επί]{1-1} B$. Ορίζουμε την επιθυμητή συνάρτηση $F : \mathcal{P}(A) \xrightarrow[επί]{1-1} \mathcal{P}(B)$, ως εξής. Για κάθε $X \subseteq A$, θέτουμε:

$$F(X) = f[X] = \{f(a) : a \in X\},$$

δηλαδή, το $F(X)$ (ορίζουμε να) είναι ίσο με την εικόνα του συνόλου X μέσω της f . Προφανώς, $F(X) \subseteq B$, για κάθε $X \subseteq A$, και άρα η συνάρτηση F είναι όντως μία συνάρτηση της μορφής $F : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$.

Μένει να δείξουμε ότι η συνάρτηση F είναι 1-1 και επί.

Έστω $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ με $X \neq Y$. Τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $a \in A$ τέτοιο ώστε $a \in X$ και $a \notin Y$ (αν $a \in Y$ και $a \notin X$ το επιχείρημα είναι ανάλογο). Όμως τότε είναι εύκολο να δείτε ότι $f(a) \in f[X]$ αλλά όμως $f(a) \notin f[Y]$ (αυτό διότι η δεδομένη f είναι 1-1), δηλαδή $F(X) \neq F(Y)$. Αυτό δείχνει ότι η F είναι 1-1.

Έστω $Y \subseteq B$. Θέτουμε $X = f^{-1}[Y]$, για το οποίο προφανώς ισχύει ότι $X \subseteq A$. Τότε, είναι εύκολο να δείτε ότι $f[X] = f[f^{-1}[Y]] = Y$ (αυτό διότι η f είναι επί του Y), δηλαδή $F(X) = Y$. Αυτό δείχνει ότι η F είναι και επί, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Παρατήρηση: η άσκηση γίνεται πραγματικά πανεύκολη με χρήση πληθαρθμικών, μιας που αν $|A| = |B|$, τότε έχουμε άμεσα ότι $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^{|B|} = |\mathcal{P}(B)|$.

Το όλο ζήτημα σε αυτήν την άσκηση ήταν να εξασκηθείτε περαιτέρω στην κατασκευή αμφιμονοσήμαντων συναρτήσεων που επιβεβαιώνουν ισοπληθικότητες συνόλων.

9. (i) Έστω σύνολα A και B ξένα μεταξύ τους (δηλ., $A \cap B = \emptyset$). Δείξτε ότι για κάθε σύνολο C ισχύει ότι:

$$(A \cup B)^C \sim {}^A C \times {}^B C.$$

(ii) Βρείτε τους πληθαρθμούς των συνόλων: ${}^{10}\omega$, ${}^\omega 10$, ${}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ και ${}^{\mathbb{Q}^2}\{2n : n \in \omega\}$.

Χρησιμοποιώντας πληθική αριθμητική δείξτε τα ακόλουθα:

(iii) $|{}^\omega \omega| = |{}^\omega \mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

(iv) $|{}^{\mathbb{R}} \omega| = |{}^{\mathbb{R}} \mathbb{R}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Λύση.

- (i) Έστω σύνολα A και B με $A \cap B = \emptyset$, και έστω οποιοδήποτε σύνολο C . Ορίζουμε μία συνάρτηση

$$G : (A \cup B)C \longrightarrow {}^A C \times {}^B C$$

ως εξής. Για κάθε $f \in (A \cup B)C$, δηλαδή για κάθε συνάρτηση της μορφής $f : A \cup B \longrightarrow C$, θέτουμε:

$$G(f) = \langle f \upharpoonright A, f \upharpoonright B \rangle.$$

Με άλλα λόγια, χωρίζουμε την οποιαδήποτε δεδομένη $f : A \cup B \longrightarrow C$ σε δύο (ξένα) μέρη: τον περιορισμό της f στο σύνολο A , και τον περιορισμό της f στο σύνολο B , αντίστοιχα, και τα τοποθετούμε το ένα δίπλα στο άλλο σε ένα διατεταγμένο ζεύγος. Παρατηρήστε ότι $f \upharpoonright A \in {}^A C$ και $f \upharpoonright B \in {}^B C$, δηλαδή $G(f) \in {}^A C \times {}^B C$, όπως πρέπει. Επίσης, παρατηρήστε ότι $f = (f \upharpoonright A) \cup (f \upharpoonright B)$.

Με αυτά τα δεδομένα, είναι εύκολο να ελέγξετε ότι η G που μόλις ορίσαμε είναι 1-1 και επί, από το οποίο άμεσα έπεται ότι:

$$(A \cup B)C \sim {}^A C \times {}^B C,$$

που είναι και το ζητούμενο.

- (ii) • $|^{10}\omega| = (\aleph_0)^{10} = \aleph_0$.

- $|^\omega 10| = 10^{\aleph_0}$. Δείχνουμε ότι $10^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, ως εξής:

$$2^{\aleph_0} \leq 10^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

και άρα τελικά $|^\omega 10| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

- Επειδή $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, έχουμε ότι $|\mathbb{Z}\mathbb{Q}| = \aleph_0^{\aleph_0}$. Δείχνουμε ότι $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, ως εξής:

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

και άρα τελικά $|\mathbb{Z}\mathbb{Q}| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

- Επειδή $|\mathbb{Q}^2| = |\{2n : n \in \omega\}| = \aleph_0$, έχουμε ότι $|\mathbb{Q}^2 \{2n : n \in \omega\}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, όπως παραπάνω.

- (iii) Έχουμε:

$$|^\omega \omega| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c},$$

όπως παραπάνω. Επίσης:

$$|^\omega \mathbb{R}| = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c},$$

όπως παραπάνω.

- (iv) Έχουμε ότι $|\mathbb{R}\omega| = \aleph_0^{\mathfrak{c}}$. Δείχνουμε ότι $\aleph_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$, ως εξής:

$$2^{\mathfrak{c}} \leq \aleph_0^{\mathfrak{c}} \leq (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}},$$

και άρα $|\mathbb{R}\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$. Επίσης:

$$|\mathbb{R}\mathbb{R}| = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}},$$

όπως προηγουμένως.

10. Δείξτε ότι, για όλους τους πληθαιθμούς κ , λ και μ , ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
- (ii) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.
- (iii) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
- (iv) $\lambda \leq \mu \longrightarrow \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$, για $\kappa \neq 0$.

Τί συμβαίνει αν $\kappa = 0$; Δηλαδή, αν $\kappa = 0$, για ποιές τιμές των λ και μ δεν ισχύει η (iv);

Λύση.

- (i) Έστω σύνολα C, A, B με $|C| = \kappa$, $|A| = \lambda$, $|B| = \mu$, και $A \cap B = \emptyset$. Τότε, για να δείξουμε ότι $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$({}^A \cup {}^B)C \sim {}^A C \times {}^B C,$$

το οποίο όμως δείξαμε στην Άσκηση 9.

- (ii) Έστω σύνολα A, B, C με $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ και $|C| = \mu$. Τότε, για να δείξουμε ότι $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$${}^C(A \times B) \sim {}^C A \times {}^C B.$$

Για αυτό, θα ορίσουμε μία συνάρτηση $G : {}^C A \times {}^C B \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} {}^C(A \times B)$. Αυτό το κάνουμε ως εξής. Για να ορίσουμε την επιθυμητή G , δεδομένων δύο συναρτήσεων $f_1 : C \longrightarrow A$ και $f_2 : C \longrightarrow B$ (δηλαδή, δεδομένων $f_1 \in {}^C A$ και $f_2 \in {}^C B$), αρκεί να ορίσουμε το $G(\langle f_1, f_2 \rangle)$. Δηλαδή, δεδομένων τέτοιων f_1 και f_2 , αρκεί να αποφασίσουμε το σε ποιο ακριβώς στοιχείο του συνόλου ${}^C(A \times B)$ να στείλουμε το διατεταγμένο ζεύγος $\langle f_1, f_2 \rangle$. Ορίζουμε, λοιπόν, το $G(\langle f_1, f_2 \rangle)$ να είναι εκείνη η συνάρτηση $f : C \longrightarrow A \times B$ η οποία, για κάθε $x \in C$, δίνει τιμή $f(x) = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle$.

Είναι εύκολο να δείτε ότι η G που μόλις ορίσαμε είναι 1-1 και επί, το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

- (iii) Έστω σύνολα A, B, C με $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ και $|C| = \mu$. Τότε, για να δείξουμε ότι $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$${}^C({}^B A) \sim ({}^{B \times C})A.$$

Για αυτό, θα ορίσουμε μία συνάρτηση $\mathcal{F} : {}^C({}^B A) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} ({}^{B \times C})A$. Για να ορίσουμε την επιθυμητή $\mathcal{F}$, δεδομένης οποιασδήποτε συνάρτησης $F : C \longrightarrow {}^B A$, αρκεί να ορίσουμε το $\mathcal{F}(F)$. Δηλαδή, αρκεί να αποφασίσουμε το σε ποιο στοιχείο του συνόλου $({}^{B \times C})A$ να στείλουμε την οποιαδήποτε τέτοια F . Ορίζουμε, λοιπόν, το $\mathcal{F}(F)$ να είναι εκείνη η συνάρτηση $g_F : B \times C \longrightarrow A$ η οποία, για κάθε $\langle x, y \rangle \in B \times C$, δίνει τιμή

$$g_F(\langle x, y \rangle) = (F(y))(x).$$

Παρατηρήστε ότι η g_F (δηλαδή η $\mathcal{F}(F)$) είναι καλά ορισμένη αφού, για κάθε $y \in C$, έχουμε ότι $F(y)$ είναι με τη σειρά της μία συνάρτηση της μορφής $F(y) : B \longrightarrow A$. Επομένως, για κάθε $\langle x, y \rangle \in B \times C$, έχουμε ότι όντως $g_F(\langle x, y \rangle) = (F(y))(x) \in A$.

Ο έλεγχος ότι η $\mathcal{F}$ που μόλις ορίσαμε είναι 1-1 και επί αφήνεται σαν άσκηση, και ολοκληρώνει την απόδειξη της ισοπληθικότητας:

$${}^C({}^B A) \sim ({}^{B \times C})A.$$

- (iv) Έστω σύνολα A, B, C με $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, $|C| = \mu$ και $\kappa \neq 0$ (δηλαδή, ισοδύναμα, $A \neq \emptyset$). Υποθέτουμε ότι $|B| \leq |C|$, δηλαδή υποθέτουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $f : B \xrightarrow{1-1} C$.

Για να δείξουμε ότι $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$, αρκεί να δείξουμε ότι $|{}^B A| \leq |{}^C A|$. Για αυτό, θα ορίσουμε μία $G : {}^B A \xrightarrow{1-1} {}^C A$. Αυτό το κάνουμε ως εξής. Εφόσον $A \neq \emptyset$, έστω κάποιο δεδομένο στοιχείο $a \in A$. Τότε, για κάθε $s \in {}^B A$, δηλαδή για κάθε συνάρτηση της μορφής $s : B \rightarrow A$, θέτουμε $G(s)$ να είναι εκείνη η συνάρτηση $g_s : C \rightarrow A$ η οποία, για κάθε $z \in C$, δίνει τιμή:

$$g_s(z) = \begin{cases} s(f^{-1}(z)) & , \text{ αν } z \in f[B] \\ a & , \text{ αλλιώς.} \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, την οποιαδήποτε συνάρτηση $s : B \rightarrow A$ την στέλνουμε στη συνάρτηση $g_s : C \rightarrow A$ η οποία δουλεύει ως εξής: για κάθε $z \in C$, αν το z ανήκει στο πεδίο τιμών της αρχικής μας f , αν δηλαδή $z = f(x)$ για κάποιο $x \in B$, τότε θέτουμε $g_s(z) = s(x)$ (παρατηρήστε ότι ο ορισμός αυτός δεν περιέχει αμφισημία, μιας που η f είναι 1-1). Αλλιώς, αν δηλαδή το όρισμα $z \in C$ δεν ανήκει στο πεδίο τιμών της αρχικής μας f , τότε θέτουμε $g_s(z)$ να είναι ίσο με το σταθερό στοιχείο $a \in A$ (το οποίο υπάρχει διότι υποθέσαμε ότι το A δεν είναι κενό).

Είναι εύκολο να δείτε ότι αυτή η απεικόνιση G που μόλις ορίσαμε είναι 1-1, το οποίο δείχνει ότι $|{}^B A| \leq |{}^C A|$ που είναι και το ζητούμενο.

Παρατηρήστε ότι η υπόθεση $\kappa \neq 0$, δηλαδή, ισοδύναμα, ότι $A \neq \emptyset$, είναι απαραίτητη. Αν $\kappa = 0$, τότε παρόλο που (προφανώς) $0 \leq 1$, έχουμε (περιέργως) ότι $0^0 > 0^1$. Δηλαδή, αν $\kappa = 0$, τότε η συνεπαγωγή αυτού του ερωτήματος είναι ψευδής για $\lambda = 0$ και $\mu = 1$. Ο λόγος για τον οποίο ισχύει ότι $0^0 > 0^1$ είναι πως ${}^\emptyset \emptyset = \{\emptyset\}$ ενώ $\{\emptyset\} \emptyset = \emptyset$. Δηλαδή, $0^0 = |{}^\emptyset \emptyset| = 1$, ενώ $0^1 = |\{\emptyset\} \emptyset| = 0$.

- A. Για οποιαδήποτε σύνολα A, A', B και B' , δείξτε ότι αν $A \sim A'$ και $B \sim B'$, τότε ${}^A B \sim {}^{A'} B'$.

Λύση. Έστω σύνολα A, A', B και B' , τέτοια ώστε $A \sim A'$ και $B \sim B'$. Έστω λοιπόν κάποιες συναρτήσεις $h_1 : A \xrightarrow[επί]{1-1} A'$ και $h_2 : B \xrightarrow[επί]{1-1} B'$ οι οποίες επιβεβαιώνουν αυτές τις ισοπληθικότητες, αντίστοιχα.

Για να δείξουμε το ζητούμενο, θα ορίσουμε μία συνάρτηση $\mathcal{F} : {}^A B \xrightarrow[επί]{1-1} {}^{A'} B'$. Για αυτό, δεδομένης μίας συνάρτησης $f \in {}^A B$ (δηλαδή, της μορφής $f : A \rightarrow B$), αρκεί να ορίσουμε το $\mathcal{F}(f)$, δηλαδή αρκεί να αποφασίσουμε το σε ποιο στοιχείο του συνόλου ${}^{A'} B'$ να στείλουμε τη δεδομένη f .

Ορίζουμε, λοιπόν, δεδομένης $f \in {}^A B$, το $\mathcal{F}(f)$ να είναι ίσο με τη συνάρτηση $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$. Με άλλα λόγια, $\mathcal{F}(f) = h_2 \circ f \circ h_1^{-1} : A' \rightarrow B'$.

Το παρακάτω διάγραμμα απεικονίζει την κατάσταση και μάς βοηθάει να καταλάβουμε την ιδέα αυτού του ορισμού. Σημειώνεται ότι τα διπλά (πάνω-κάτω) βέλη για τις συναρτήσεις h_1 και h_2 απλά υποδηλώνουν ότι αυτές είναι 1-1 και επί και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ελεύθερα είτε τις ίδιες είτε τις αντίστροφές τους για να κινηθούμε στο διάγραμμα. Επί της ουσίας, ορίζουμε την επιθυμητή συνάρτηση $\mathcal{F}(f)$ ως εξής: ξεκινώντας από το σύνολο A' (δηλαδή, για κάθε όρισμα $x \in A'$), ακολουθούμε τα διαθέσιμα βέλη για να φτάσουμε στο

σύνολο B' (δηλαδή στην τιμή $(\mathcal{F}(f))(x)$).

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow h_1 & & \downarrow h_2 \\ A' & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)=h_2 \circ f \circ h_1^{-1}} & B' \end{array}$$

Είναι εύκολο να δείτε ότι η απεικόνιση $\mathcal{F} : {}^A B \longrightarrow {}^{A'} B'$ που μόλις ορίσαμε είναι 1-1 και επί, το οποίο ήταν και το ζητούμενο.

- B. Έστω X το σύνολο των **συνεχών** πραγματικών συναρτήσεων $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$. Δείξτε ότι $|X| = \mathfrak{c}$.

Λύση.

Όπως λέει και η υπόδειξη της άσκησης, μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ προσδιορίζεται μοναδικά από τις τιμές της στους ρητούς αριθμούς του διαστήματος $[0, 1]$, δηλαδή από τις τιμές της στο σύνολο $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Με άλλα λόγια, θα δείξουμε αρχικά ότι αν $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ και $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις, τότε $f = g$ αν και μόνο αν $f \upharpoonright A = g \upharpoonright A$. Προφανώς, η μία κατεύθυνση αυτού του ισχυρισμού είναι τετριμμένη. Για τη μη τετριμμένη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ και $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f \upharpoonright A = g \upharpoonright A$. Θα δείξουμε ότι $f = g$.

Για αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, ισχύει ότι $f(x) = g(x)$. Έστω λοιπόν τυχόν στοιχείο $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Από ανάλυση, (ελπίζω ότι) ξέρουμε ότι υπάρχει ακολουθία ρητών $(q_n)_{n \in \omega}$, με $q_n \in [0, 1]$ για κάθε $n \in \omega$, τέτοια ώστε $\lim_n q_n = x$ (αυτό ουσιαστικά προκύπτει λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς – μάλιστα, μπορούμε κάλλιστα να υποθέσουμε, αν θέλουμε, ότι η ακολουθία των ρητών είναι και γνησίως αύξουσα).

Επειδή, από υπόθεση, $f \upharpoonright A = g \upharpoonright A$, έχουμε ότι $f(q_n) = g(q_n)$, για κάθε $n \in \omega$. Επομένως, και επειδή οι συναρτήσεις είναι συνεχείς, έχουμε:

$$f(x) = f(\lim_n q_n) = \lim_n f(q_n) = \lim_n g(q_n) = g(\lim_n q_n) = g(x),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Η ιδέα εδώ είναι ότι εφόσον μπορούμε να προσεγγίσουμε με αριθμήσιμη ακολουθία ρητών τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό του διαστήματος $[0, 1]$, οι τιμές μίας συνεχούς συνάρτησης στο σύνολο $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ καθορίζουν τις τιμές της σε όλα τα στοιχεία του $[0, 1]$.

Τώρα, έστω X το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$. Παρατηρούμε αρχικά ότι $\mathfrak{c} \leq |X|$: αυτό διότι $|[0, 1]| = \mathfrak{c}$ και, άρα, για κάθε $a \in [0, 1]$ μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερή συνάρτηση $f_a : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ (δηλαδή τέτοια ώστε $f_a(x) = a$ για κάθε $x \in [0, 1]$) η οποία είναι προφανώς συνεχής. Επειδή διαφορετικά $a \in [0, 1]$ αντιστοιχούν (προφανώς) σε διαφορετικές σταθερές συναρτήσεις, έπεται ότι $\mathfrak{c} \leq |X|$.

Επομένως, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των Cantor-Schröder-Bernstein, για να δείξουμε ότι $|X| = \mathfrak{c}$, αρκεί να δείξουμε ότι και $|X| \leq \mathfrak{c}$. Για αυτό, ορίζουμε την $\mathcal{F} : X \longrightarrow {}^A[0, 1]$ ως εξής. Για κάθε $f \in X$, θέτουμε $\mathcal{F}(f) = f \upharpoonright A$. Από τον ισχυρισμό που δείξαμε παραπάνω, έπεται ότι η $\mathcal{F}$ που μόλις ορίσαμε είναι 1-1. Επομένως, και παρατηρώντας ότι $|A| = \aleph_0$, έχουμε:

$$|X| \leq |{}^A[0, 1]| = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c},$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.