ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ Ι
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2006

Κεφάλαιο 1ο
Τα βασικά χρηματοοικονομικά παράγωγα και η αρχή της μη επιτηδειότητας

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν μια συνοπτική εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία. Στο παρόν κεφάλαιο θα γνωρίσουμε τα βασικότερα παράγωγα, που θα αποτελέσουν το κεντρικό αντικείμενο της μελέτης μας, και το βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυσή τους, την *αρχή της μη επιτηδειότητας* (principle of no arbitrage.)

1. Τα βασικά χρηματοοικονομικά παράγωγα

Τα παράγωγα προϊόντα (derivative securities) είναι συμβόλαια που καθορίζουν μια συμφωνία που πρόκειται να υλοποιηθεί στο μέλλον και η αξία της οποίας εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου (πρωτογενούς) προϊόντος. Για το λόγο αυτό ονομάζονται και εξαρτώμενες απαιτήσεις (contingent claims.) Το πρωτογενές προϊόν (από το οποίο εξαρτάται η αξία του παραγώγου) μπορεί να είναι μια μετοχή, ένα ξένο συνάλλαγμα, ένα αγαθό (π.χ. πετρέλαιο), ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ένα ομόλογο, ακόμα κι ένα άλλο παράγωγο.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα παραγώγων.

Ένα **προθεσμιακό συμβόλαιο** (forward contract) με χρόνο ωρίμανσης (maturity) T και τιμή παράδοσης (delivery price) K είναι μια συμφωνία για την αγορά του πρωτογενούς προϊόν στο χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο αγοραστής θα λέμε ότι έχει την θετική θέση (long position) ενώ ο πωλητής την αρνητική θέση (short position.) Η αξία της συμφωνίας αυτής στην ωρίμανση εξαρτάται από την αξία (S_T) που θα έχει τότε το πρωτογενές προϊόν. Η απόδοση του προθεσμιακού συμβολαίου στην ωρίμανση για τον κάτοχο της θετικής θέσης είναι $S_T - K$ και μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

Ένα **ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς** (european call option) με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K δίνει στον κάτοχό του (θετική θέση) το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) να αγοράσει από τον αντισυμβαλλόμενο (αρνητική θέση) το πρωτογενές προϊόν στο χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο λογικός επενδυτής με θετική θέση θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς μόνο όταν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση (S_T) είναι μεγαλύτερη του K. Επομένως η απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην ωρίμανση για τον κάτοχο του είναι $(S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}$ και είναι πάντοτε μη αρνητική.

Ένα **αμερικανικό δικαίωμα αγοράς** (american call option) διαφέρει από το αντίστοιχο ευρωπαϊκό στο ότι μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι και την ωρίμανσή του.

Ένα **ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης** (european put option) με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K δίνει στον κάτοχό του (θετική θέση) το δικαίωμα να πουλήσει στον αντισυμβαλλόμενο (αρνητική θέση) το πρωτογενές προϊόν στο χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο λογικός επενδυτής με θετική θέση θα ασκήσει το δικαίωμα πώλησης μόνο όταν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση είναι μικρότερη του K. Επομένως η απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης στην ωρίμανση είναι $(K - S_T)^+$ και είναι πάντοτε μη αρνητική. Όπως και στην περίπτωση των δικαιωμάτων αγοράς ένα **αμερικανικό δικαίωμα πώλησης** διαφέρει από το αντίστοιχο ευρωπαϊκό στο ότι μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι και την ωρίμανσή του. Περισσότερα παραδείγματα θα δούμε στην πορεία του μαθήματος.

Η διαπραγμάτευση των παραγώγων γίνεται είτε μέσω Χρηματιστηρίων είτε απ' ευθείας (over the counter) μεταξύ των ενδιαφερόμενων πλευρών (συνήθως αξιόπιστων χρηματοοικονομικών οργανισμών.) Στην

Ελλάδα η αγορά παραγώγων λειτουργεί από το 1997. Στις Η.Π.Α. ο τζίρος της αγοράς παραγώγων μετοχών ξεπερνά αυτόν της αγοράς των ίδιων των μετοχών. Τι είναι λοιπόν αυτό που κάνει έναν επενδυτή να στραφεί στην αγορά παραγώγων; Η συνηθισμένη απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι " η κερδοσκοπία και η αντιστάθμιση του κινδύνου" (speculation and hedging.) Ας προσπαθήσουμε να το καταλάβουμε μέσα από τα ακόλουθα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1 Ένας επενδυτής πιστεύει ότι η αξία της μετοχής μιας εταιρείας X πρόκειται να ανέβει σημαντικά μέσα στον επόμενο μήνα και θέλει να επενδύσει στη μετοχή αυτή. Η τιμή της μετοχής σήμερα είναι €10, ενώ στην αγορά επίσης διατίθεται προς €2 ένα αμερικανικό δικαιώμα αγοράς της μετοχής της εταιρείας X με ωρίμανση σε ένα μήνα και τιμή άσκησης €10. Ο επενδυτής αποφασίζει να διαθέσει €1.000 και εξετάζει δύο εναλλακτικές επενδυτικές στρατηγικές: είτε να αγοράσει 100 μετοχές της εταιρείας, είτε να αγοράσει ένα δικαιώμα αγοράς 500 μετοχών. Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί στις δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η πεποίθηση του επενδυτή επαληθευτεί ή όχι. Αν η τιμή της μετοχής παραμείνει διαρκώς κάτω από τα €10 τότε στην πρώτη περίπτωση θα διατηρήσει την αξία των μετοχών του ενώ στη δεύτερη θα χάσει όλη του την επένδυση αφού δεν θα μπορέσει να ασκήσει το δικαίωμα που έχει αγοράσει. Αυτή ακριβώς η μεγαλύτερη έκθεση σε κίνδυνο είναι και ο λόγος που κοστίζει πάντα λιγότερο να αγοράσει κανείς ένα δικαίωμα αγοράς της μετοχής από ότι την ίδια τη μετοχή. Στο παράδειγμά μας ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει 100 μετοχές ή το δικαίωμα αγοράς 500 μετοχών. Αν όμως η αξία της μετοχής όντως ανέβει τότε κάθε επιπλέον ευρώ ανόδου στην αξία της μετοχής θα αποφέρει στον επενδυτή €100 επιπλέον αν έχει επενδύσει στη μετοχή αλλά €500 επιπλέον αν έχει επενδύσει στο παράγωγό της. Έτσι αν για παράδειγμα η τιμή της μετοχής ανέβει στα €15 τότε στην πρώτη περίπτωση η αξία των μετοχών του επενδυτή θα είναι €1500, αποφέροντάς του κέρδος 50%. Στη δεύτερη περίπτωση μπορεί, χρησιμοποιώντας το δικαίωμα, να αγοράσει 500 μετοχές της εταιρείας προς €10 και να τις πουλήσει άμεσα στην αγοραία τιμή τους (€15.) Αυτό θα του αποφέρει €5/μετοχή× 500 μετοχές =€2500, και κέρδος 150% επί της αρχικής του επένδυσης! Η επένδυση στο δικαίωμα αγοράς ενέχει μεν μεγαλύτερο κίνδυνο αφήνει όμως και μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους αν η πεποίθηση του επενδυτή επαληθευτεί. Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης παραγώγων για κερδοσκοπία. Θα πρέπει όμως κανείς να έχει κατά νου ότι τα παράγωγα είναι όπως τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Το κέρδος του ενός συμβαλλόμενου είναι η ζημιά του άλλου. Και συνήθως οι άλλοι είναι μεγάλοι οργανισμοί που μπορούν με τις κινήσεις τους να επηρεάσουν την αγορά.

Παράδειγμα 2 Μια ελληνική εταιρεία υπογράφει ένα συμβόλαιο για την αγορά ενός μηχανήματος από μια αμερικανική κατασκευάστρια. Η τελευταία αναλαμβάνει να παραδώσει το μηχάνημα σε ένα χρόνο έναντι \$100.000. Η τρέχουσα ισοτιμία \$/€είναι \$1=€0,78923. Η ελληνική εταιρεία βρίσκει την τιμή συμφέρουσα αλλά ανησυχεί για την ισοτιμία \$/€σε ένα χρόνο Θέλοντας να καταρτίσει τον προϋπολογισμό της θα ήθελε να σιγουρέψει ότι δεν θα πληρώσει πάνω από €80.000 για το μηχάνημα. Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς \$100.000 με ωρίμανση σε ένα χρόνο και τιμή άσκησης €80.000 θα μπορούσε να φανεί πολύ χρήσιμο. Αν σ' ένα χρόνο η ισοτιμία \$/€έχει υπερβεί τα 0,80€/\$ η εταιρεία θα μπορεί να ασκήσει το δικαίωμα αγοράς και να λάβει \$100.000 έναντι €80.000. Αν πάλι η ισοτιμία έχει μείνει κάτω από 0,80€/\$ τότε η εταιρεία μπορεί να ανταλλάξει ευρώ προς αμερικανικά δολλάρια στην τρέχουσα ισοτιμία. Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης παραγώγων για την αντιστάθμιση του κινδύνου από τις μεταβολές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος.

Είναι σαφές ότι ένα προϊόν όπως π.χ. το ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης μόνο θετικό μπορεί να αποβεί για τον κάτοχό του. Εύλογο είναι λοιπόν ότι θα πρέπει να καταβάλει στον αντισυμβαλλόμενο (αρνητική θέση) ένα αρχικό τίμημα για να το αποκτήσει. Το αν υπάρχει κάποιο τίμημα που μπορεί να θεωρηθεί "δίκαιο" και το ποιο είναι αυτό ακριβώς είναι ένα μη τετριμμένο πρόβλημα. Στο μεγαλύτερο μέρος του μαθήματος θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων. Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιούμε στην τιμολόγηση των παραγώγων είναι η αρχή της μη επιτηδειότητας (principle of no arbitrage) και αποτελεί το αντικείμενο της επόμενης παραγράφου.

2. Η αρχή της μη επιτηδειότητας

Η αρχή της μη επιτηδειότητας αξιώνει ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξει δυνατότητα κέρδους χωρίς την ανάληψη ρίσκου. Μπορεί κανείς να επιχειρηματολογήσει γιατί, τουλάχιστον σε αγορές που βρίσκονται σε ισορροπία, δεν θα πρέπει να υπάρχει δυνατότητα κέρδους χωρίς κίνδυνο, αλλά στη μαθηματική θεωρία της Χρηματοοικονομικής δεχόμαστε την αρχή της μη επιτηδειότητας σαν αξιώμα.

Συνήθως μια αγορά μοντελοποιείται από ένα χώρο πιθανότητας τα σημεία του οποίου αντιπροσωπεύουν τα δυνατά σενάρια εξέλιξης της αγοράς. Οι τιμές των διαφόρων προϊόντων είναι στοχαστικές ανελίξεις ορισμένες σε αυτό το χώρο πιθανότητας και η στατιστική τους αντανακλά την πεποίθηση που υπάρχει για τη δυναμική τους. Τέτοια υποδείγματα έχουν προταθεί και θα δούμε πολλά, άλλα εύχρηστα αλλά μάλλον απλοϊκά, άλλα περισσότερο ρεαλιστικά αλλά τεχνικά δυσκολότερα στην ανάλυσή τους. Η τιμολόγηση των περισσότερων παραγώγων βασίζεται στην αρχή της μη επιτηδειότητας αλλά και στις λεπτομέρειες του υποδείγματος αγοράς που υιοθετούμε. Θα αναβάλλουμε για το επόμενο κεφάλαιο την αυστηρή μαθηματική περιγραφή τέτοιων μοντέλων και θα ασχοληθούμε εδώ με τους περιορισμούς που επιβάλλονται μόνο από την αρχή της μη επιτηδειότητας, χωρίς κάποια υπόθεση για τη δυναμική της αγοράς.

Η ακόλουθη πρόταση είναι άμεση συνέπεια της αρχής της μη επιτηδειότητας και θα μας φανεί πολύ χρήσιμη.

Πρόταση 1 α) Αν τη στιγμή $T \geq 0$ ένα χαρτοφυλακίο A έχει *σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο* μη αρνητική αξία τότε και η αρχική του αξία θα είναι μη αρνητική:

$$V_T(A) \geq 0 \implies V_0(A) \geq 0.$$

β) Αν τη στιγμή $T \geq 0$ η αξία ενός χαρτοφυλακίου A είναι *σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο* τουλάχιστον όση η αξία ενός χαρτοφυλακίου B τότε και η αρχική αξία του A θα είναι τουλάχιστον όση η αρχική αξία του B:

$$V_T(A) \geq V_T(B) \implies V_0(A) \geq V_0(B).$$

γ) Αν τη στιγμή $T \geq 0$ η αξία ενός χαρτοφυλακίου A ταυτίζεται *σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο* με την αξία ενός χαρτοφυλακίου B τότε και η αρχική αξία του A θα είναι ίση με την αρχική αξία του B:

$$V_T(A) = V_T(B) \implies V_0(A) = V_0(B).$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

1. Θα πρέπει να δώσουμε προσοχή στη σημασία της φράσης "σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο" στη διατύπωση της παραπάνω πρότασης. Ένα χαρτοφυλάκιο εν γένει αποτελείται από τίτλους η αξία των οποίων στο χρόνο T δεν μας είναι γνωστή σήμερα και εξαρτάται από το τι θα συμβεί στην αγορά μέχρι τη στιγμή T. Για να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση θα πρέπει να εξασφαλίζουμε ότι οι προϋποθέσεις της ισχύουν ανεξαρτήτως του τι μπορεί να συμβεί στην αγορά μέχρι το χρόνο T (χωρίς κίνδυνο.) Αυτό θα γίνει πιο κατανοητό από το επόμενο κεφάλαιο όταν θα μοντελοποιούμε τα δυνατά σενάρια εξέλιξης της αγοράς ως σημεία ενός χώρου πιθανότητας, οπότε η $V_T(A)$ θα είναι μια τυχαία μεταβλητή. Λέγοντας τότε ότι $V_T(A) \geq 0$ θα εννοούμε ότι αυτή η τυχαία μεταβλητή είναι μη αρνητική με πιθανότητα 1. Αν αυτό ισχύει τότε η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει στην αρχική αξία του χαρτοφυλακίου (που είναι ένα συγκεκριμένο ποσό) να είναι μη αρνητική.

2. Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε πως σε μια αγορά υπάρχει μια μετοχή αξίας €10 και ότι η αξία ενός δικαιώματος αγοράς της μετοχής με

ωρίμανση T και τιμή άσκησης €12 είναι €2. Αν θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει τη μετοχή και αρνητική θέση σε πέντε δικαιώματα αγοράς της μετοχής τότε η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου είναι μηδενική. Η αξία όμως του χαρτοφυλακίου τη στιγμή T θα είναι $V_T = S_T - 5(S_T - €12)^+$ και το αν θα είναι θετική ή αρνητική εξαρτάται από την αξία S_T της μετοχής στο χρόνο T.

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω θα κάνουμε μια μικρή παρέκκλιση για να συζητήσουμε την αξία του χρήματος στο χρόνο. Θα υποθέσουμε ότι μπορούμε να δανείζουμε και να δανειζόμαστε χρήματα χωρίς κίνδυνο. Το γεγονός αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να συγκρίνουμε ποσά που καταβάλονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και άρα να υπολογίζουμε τη σημερινή αξία μιας πληρωμής που θα γίνει στο μέλλον. Πιο συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι στην αγορά μας υπάρχει ένα προϊόν με αξία €1 τη στιγμή T και στο οποίο μπορούμε να πάρουμε θετική η αρνητική θέση. Επειδή η απόδοση αυτού το προϊόντος δεν εξαρτάται από την εξέλιξη της αγοράς μέχρι το χρόνο T το προϊόν αυτό ονομάζεται *άνευ κινδύνου προϊόν*. Τη σημερινή αξία αυτού του προϊόντος (σε €) τη συμβολίζουμε με $B(0,T)$. Έτσι η σημερινή αξία μιας πληρωμής K που πρόκειται να γίνει στο χρόνο T έχει σημερινή αξία $K \times B(0,T)$. Ειρήσθω εν παρόδω από την αρχή της μη επιτηδειότητας θα πρέπει $B(0,T) > 0$ (γιατι;) Στην πράξη ένα τέτοιο προϊόν μπορεί να είναι ένα ομόλογο ή ένας καταθετικός λογαριασμός. Αν ένας καταθετικός λογαριασμός προσφέρει σταθερό επιτόκιο r υπολογισμένο με συνεχή ανατοκισμό τότε καταθέτοντας σήμερα ένα ποσό A, τη στιγμή T θα έχουμε Ae^{rT}. Επομένως αν το άνευ κινδύνου προϊόν είναι ένας τέτοιος λογαριασμός έχουμε $B(0,T) = e^{-rT}$. Εφεξής και μέχρι νεώτερη ειδοποίηση θα κάνουμε αυτή την υπόθεση.

Ας δούμε τώρα πώς, χρησιμοποιώντας την πρόταση 1, μπορούμε να εξαγάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την αρχική αξία των παραγώγων που γνωρίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Είδαμε ότι απόδοση ενός προθεσμιακού συμβολαίου στην ωρίμανση είναι $S_T - K$. Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο A που αποτελείται από το πρωτογενές προϊόν και μια αρνητική θέση σε ένα ομόλογο όψεως K και ωρίμανσης T. Έστω επίσης χαρτοφυλάκιο B που αποτελείται από (μια θετική θέση σε) ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή παράδοσης K. Η αξία του χαρτοφυλακίου A στην ωρίμανση είναι $S_T - K$ όση και αυτή του B, επομένως τα δύο χαρτοφυλάκια πρέπει να έχουν την ίδια αρχική αξία. Αν λοιπόν $F(S_0, T, K)$ είναι η αρχική αξία του προθεσμιακού συμβολαίου έχουμε:

$$F(S_0, T, K) = S_0 - KB(0,T) = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Υπάρχει μια τιμή παράδοσης $K_f = S_0 e^{rT}$ για την οποία η αρχική αξία του προθεσμιακού συμβολαίου είναι μηδενική (επομένως οι συμβαλλόμενοι δεν ανταλλάσουν χρήματα κατά την υπογραφή του.) Αυτή ονομάζεται *προθεσμιακή τιμή* (forward price) του συμβολαίου και είναι η τιμή παράδοσης που συνήθως χρησιμοποιείται στην πράξη.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Θεωρούμε χαρτοφυλάκιο A αποτελούμενο από (μια θετική θέση σε) ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K. Είδαμε ότι η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου στην ωρίμανση είναι $V_T(A) = (S_T - K)^+ \geq 0$. Θα συμβολίζουμε την αρχική του αξία με $c(S_0, T, K)$, όπου S_0 είναι η αρχική αξία του πρωτογενούς προϊόντος. Είναι φανερό από την πρόταση 1 ότι θα πρέπει $c(S_0, T, K) \geq 0$. Έστω επίσης χαρτοφυλάκιο B που αποτελείται από (μια θετική θέση σε) ένα προθεσμιακό συμβόλαιο για την αγορά του πρωτογενούς προϊόντος με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή παράδοσης K. Η απόδοση του χαρτοφυλακίου B στην ωρίμανση είναι $V_T(B) = S_T - K \leq (S_T - K)^+ = V_T(A)$ και άρα η αρχική αξία του B δεν μπορεί να υπερβαίνει την αρχική αξία του A. Επομένως, $c(S_0, T, K) \geq S_0 - Ke^{-rT}$, και άρα:

$$c(S_0, T, K) \geq \max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} = (S_0 - Ke^{-rT})^+.$$

Έστω τώρα χαρτοφυλάκιο B' αποτελούμενο από το πρωτογενές προϊόν. Η αξία του χαρτοφυλακίου B' στην ωρίμανση είναι S_T και είναι μεγαλύτερη από $(S_T - K)^+$. Επομένως και η αρχική του αξία είναι τουλάχιστον όση του δικαιώματος αγοράς. Έχουμε λοιπόν τις εκτιμήσεις:

$$(S_0 - Ke^{-rT})^+ \leq c(S_0, T, K) \leq S_0. \tag{1}$$

Διαισθητικά περιμένουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή άσκησης ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς τόσο μικρότερη θα πρέπει να είναι η αρχική του αξία. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της αρχής της μη επιτηδειότητας: Εφόσον για $K_1 \leq K_2$ έχουμε $(S_T - K_1)^+ \geq (S_T - K_2)^+$, έχουμε

$$K_1 \leq K_2 \Longrightarrow c(S_0, T, K_1) \geq c(S_0, T, K_2).$$

Περισσότερες τέτοιες σχέσεις που η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει στη "δίκαιη" τιμή των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς θα δούμε στις ασκήσεις του πρώτου φυλλαδίου.

Από την ταυτότητα $x = x^+ - x^- = x^+ - (-x)^+$ έχουμε ότι:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+.$$

Αν λοιπόν το χαρτοφυλάκιο A αποτελείται από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο, ενώ το χαρτοφυλάκιο B από μια θετική θέση σ' ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και μια αρνητική θέση σ' ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, όλα με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K, οι αποδόσεις των δύο χαρτοφυλακίων στην ωρίμανση συμπίπτουν. Από την αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλεται και οι αρχικές τους αξίες να είναι ίσες. Αν λοιπόν συμβολίζουμε με $p(S_0, T, K)$ την αρχική αξία του εν λόγω ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης έχουμε:

$$F(S_0, T, K) = S_0 - Ke^{-rT} = c(S_0, T, K) - p(S_0, T, K). \tag{2}$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται *ισοτιμία ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης* (put-call parity.) Αυτομάτως, οι εκτιμήσεις μας για την $c(S_0, T, K)$ (σχέση 1) οδηγούν σε εκτιμήσεις για την $p(S_0, T, K)$. Έτσι,

$$(Ke^{-rT} - S_0)^+ \leq p(S_0, T, K) \leq Ke^{-rT}.$$

Στα παραπάνω υποθέσαμε ότι η κατοχή του πρωτογενούς προϊόντος (στο χαρτοφυλάκιο A) δεν συνεπάγεται κάποιο κόστος ή όφελος. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτό δεν είναι ακριβές. Για παράδειγμα, μια μετοχή μπορεί να πληρώσει μέρισμα στους κατόχους της κάποια στιγμή πριν την ωρίμανση, ένα αγαθό μπορεί να επιφέρει κάποιο κόστος αποθήκευσης, ή ένα ξένο συνάλλαγμα μπορεί να αποφέρει τόκους. Αυτά τα επιπλέον έσοδα ή έξοδα από την κατοχή του πρωτογενούς προϊόντος δεν αφορούν φυσικά τους κατόχους παραγώγων γιαυτό και η αξία ενός παραγώγου σε μια τέτοια περίπτωση είναι διαφορετική.

Ας δούμε π.χ. πώς αλλάζει η αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου αν το πρωτογενές προϊόν είναι η μετοχή μιας εταιρείας που αποδίδει στους κατόχους της μέρισμα D ανά μετοχή στο χρόνο $t < T$. Με τη διανομή του μερίσματος η αξία της εταιρείας θα μειωθεί κατά το κεφάλαιο που μοίρασε στους μετόχους της. Επειδή η αξία μιας μετοχής αντιπροσωπεύει ένα μέρος της αξίας της εταιρείας, αυτομάτως η αξία κάθε μετοχής θα μειωθεί κατά D. Έτσι ο κάτοχος μιας μετοχής ακριβώς πριν τη διανομή του μερίσματος θα έχει μια μετοχή αξίας S_{t-}, ενώ ακριβώς μετά θα έχει μια μετοχή αξίας $S_{t+} = S_{t-} - D$ και μετρητά D. Αν λοιπόν το χαρτοφυλάκιο A περιέχει αρχικά τη μετοχή, αρνητική θέση σε ένα ομόλογο όψεως K και ωρίμανσης T, και αρνητική θέση σ' ένα ομόλογο όψεως D και ωρίμανσης t, το μέρισμα που θα λάβουμε θα καλύψει ακριβώς την υποχρέωσή μας στο ομόλογο που ωριμάζει τη στιγμή t, και η αξία του χαρτοφυλακίου μας χρόνο T θα είναι $V_T(A) = S_T - K$. Από την αρχή της μη επιτηδειότητας η αρχική αξία του προθεσμιακού συμβολαίου θα πρέπει να είναι ίση με αυτήν του χαρτοφυλακίου A. Επομένως:

$$F(S_0, T, K) = S_0 - KB(0, T) - DB(0, t) = S_0 - De^{-rt} - Ke^{-rT}.$$

Ομοίως, η σχέση ισοτιμίας των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης γίνεται:

$$c(S_0, T, K) - p(S_0, T, K) = S_0 - De^{-rt} - Ke^{-rT}.$$

Δείτε τι γίνεται αν η μετοχή πληρώνει και δεύτερο μέρισμα πριν την ωρίμανση και γενικεύστε.

3. Σύνθεση παραγώγων ευρωπαϊκού τύπου

Ένα παράγωγο ονομάζεται ευρωπαϊκού τύπου αν η αξία του στην ωρίμανση T εξαρτάται μόνο από την τιμή που λαμβάνει το πρωτογενές προϊόν στην ωρίμανση (επομένως έχει τη μορφή $f(S_T)$ για κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.) Ένας επενδυτής που επιθυμεί να επενδύσει σε παράγωγα θα ήθελε να επιλέξει τη συνάρτηση απόδοσης f που ταιριάζει στις ανάγκες του. Από την άλλη είναι κατανοητό ότι δεν μπορούν να υπάρχουν στην αγορά έτοιμα παράγωγα για κάθε συνάρτησή απόδοσης f. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς μπορούμε να "συνθέσουμε" ένα τέτοιο παράγωγο, να κατασκευάσουμε δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο που να έχει την επιθυμητή απόδοση f χρησιμοποιώντας απλά παράγωγα σαν αυτά που είδαμε στην πρώτη παράγραφο.

Αν και τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς (πώλησης) είναι απλά χρηματιστηριακά προϊόντα εντούτοις αρκούν για να συνθέσουμε πρακτικά οποιοδήποτε ευρωπαϊκό παράγωγο με τον ίδιο χρόνο ωρίμανσης. Μπορείτε εύκολα να δείτε ότι αν η f έχει παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξης τότε για κάθε $x \geq 0$ έχουμε:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_{(0,\infty)} (x-y)^+ f''(y)\ dy. \tag{3}$$

Άρα η απόδοση του παραγώγου στην ωρίμανση είναι ίδια με αυτήν ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από ένα ομόλογο όψεως $f(0)$, $f'(0)$ μέρη του πρωτογενούς προϊόντος και ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς όλων των δυνατών τιμών άσκησης. Είναι ενδιαφέρον ότι η (3) παραμένει σε ισχύ όταν η f είναι απλά μια κυρτή συνάρτηση (με την ερμηνεία ότι η f' είναι μια αύξουσα δεξιά συνεχής συνάρτηση και η f'' ένα μέτρο). Επιπλέον αν γνωρίζουμε την αρχική αξία των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς μπορούμε να υπολογίσουμε και την αρχική αξία του παραγώγου:

$$V_0(f) = f(0)e^{-rT} + f'(0)S_0 + \int_{(0,\infty)} c(S_0,T,y) f''(y)\ dy.$$

Επομένως μπορούμε να συνθέσουμε από ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς, ομόλογα, και το πρωτογενές προϊόν και να τιμολογήσουμε ευρωπαϊκά παράγωγα των οποίων η απόδοση είναι γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων (π.χ. μια τμηματικά γραμμική συνεχής συνάρτηση) της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος. Στην πράξη αυτό είναι πολύ πιο εύκολο από ό,τι ακούγεται όπως θα δούμε στα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3 Θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ευρωπαϊκό παράγωγο του οποίου η απόδοση έχει ως εξής:

$$f(S_T) = \begin{cases} S_T & , 0 \leq S_T \leq K \\ K & , K \leq S_T \leq 9K \\ 10K - S_T & , 9K \leq S_T \leq 10K \\ 0 & , S_T \geq 10K. \end{cases}$$

Έχουμε: $f(0) = 0$, $f'_+(0) = 1$, $f''(y) = -\delta_K(y) - \delta_{9K}(y) + \delta_{10K}(y)$, για $y > 0$. Από την 3 έχουμε $f(x) = x-(x-K)^+-(x-9K)^++(x-10K)^+$, επομένως το παράγωγο που θέλουμε να συνθέσουμε είναι ουσιαστικά ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από το πρωτογενές προϊόν, θετική θέση σ' ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή παράδοσης $10K$, και αρνητική θέση στα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς με τιμές παράδοσης K και $9K$. Από την αρχή της μη επιτηδειότητας η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$V_0 = S_0 + c(S_0,T,10K) - c(S_0,T,K) - c(S_0,T,9K).$$

Παράδειγμα 4 Θεωρήστε ένα παράγωγο με συνάρτηση απόδοσης

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & , S_T < K, \\ 1 & , S_T \geq K. \end{cases}$$

Η απόδοση αυτού του παραγώγου δεν είναι συνεχής συνάρτηση άρα σίγουρα δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων (οι κυρτές συναρτήσεις είναι συνεχείς.) Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την f με συνεχείς, τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε την ακόλουθη ανισότητα για κάθε $h > 0$:

$$\frac{(x-(K-h))^+ - (x-K)^+}{h} \leq f(x) \leq \frac{(x-K)^+ - (x-(K+h))^+}{h}.$$

Από την αρχή της μη επιτηδειότητας θα πρέπει λοιπόν να έχουμε:

$$\frac{c(S_0, T, K-h) - c(S_0, T, K)}{h} \leq V_0(f) \leq \frac{c(S_0, T, K) - c(S_0, T, K+h)}{h}.$$

Αν λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και αυτή είναι παραγωγίσιμη ως προς την τιμή άσκησης, παίρνοντας $h \to 0$ λαμβάνουμε:

$$V_0(f) = -\frac{\partial c(S_0, T, K)}{\partial K}.$$

4. Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (future contracts)

Ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης είναι όπως και ένα προθεσμιακό συμβόλαιο μια συμφωνία για την αγορά/πώληση καθορισμένης ποσότητας ενός προϊόντος σε καθορισμένο χρόνο έναντι καθορισμένου τιμήματος.

Η βασικότερη διαφορά μεταξύ προθεσμιακών συμβολαίων και συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης είναι ότι ενώ στα μεν το συμφωνηθέν τίμημα καταβάλεται εξ΄ ολοκλήρου στην ωρίμανση, στα δε το τίμημα καταβάλλεται σταδιακά ενόσω το συμβόλαιο είναι σε ισχύ, ενώ στην ωρίμανση το προϊόν πωλείται στην αγοραία τιμή του. Θα εξηγήσουμε τον τρόπο αυτό με ένα παράδειγμα, καλό είναι όμως να διαβάσετε από το βιβλίο του Hull ή των Jarrow & Turnbull τις περισσότερο οικονομικής υφής λεπτομέρειες.

Έστω ότι τη 12^η Οκτωβρίου ο Α συμφωνεί να αγοράσει από τον Β ποσότητα Υ του προϊόντος Χ την 30^η Νοεμβρίου έναντι τιμήματος f_0. Τέτοια συμβόλαια -για την ίδια ποσότητα και τον ίδιο χρόνο παράδοσης - είναι τυποποιημένα και συνάπτονται και μεταξύ άλλων επενδυτών. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι την 13^η Οκτωβρίου η (τελευταία) τιμή που συμφωνήθηκε για ένα τέτοιο συμβόλαιο είναι $f_1 > f_0$. Τότε ο Α (του οποίου η θέση απέκτησε αξία σε σχέση με την προηγούμενη μέρα) λαμβάνει από τον Β την διαφορά $f_1 - f_0$. Ομοίως, αν $f_0 > f_1$ ο Β λαμβάνει από τον Α $f_0 - f_1$. Η διαδικασία αυτή καλείται καθημερινή αποτίμηση (marking-to-market) και οι πληρωμές πραγματοποιούνται μέσω λογαριασμών περιθωρίου ασφάλισης (margin accounts) που οι συμβαλλόμενοι είναι υποχρεωμένοι να διατηρούν πάνω από κάποιο καθορισμένο υπόλοιπο. Αυτό επαναλαμβάνεται καθημερινά: στο τέλος της $n-$οστής ημέρας, ποσόν $f_{n-1} - f_n$ (θετικό ή αρνητικό) μεταφέρεται από το λογαριασμό του Α σ΄ αυτόν του Β, ώσπου στην ημερομηνία παράδοσης ο Α αγοράζει το προϊόν από τον Β στην τρέχουσα τιμή του προϊόντος S_N. Το άθροισμα των ενδιάμεσων πληρωμών από τον Α στον Β είναι τηλεσκοπικό και ισούται με $f_0 - f_N$. (N εδώ είναι το πλήθος των ημερών μέχρι την ωρίμανση). Όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς από την αρχή της μη επιτηδειότητας θα πρέπει $f_N = S_N$. Μαζί με την τελική πληρωμή S_N λοιπόν ο Α θα έχει καταβάλλει στον Β συνολικά ποσό f_0 που είναι και το συμφωνηθέν τίμημα.

Ο λόγος ύπαρξης αυτής της διαδικασίας καθημερινής καταβολής της διαφοράς στη μελλοντική τιμή είναι η ελαχιστοποίηση του κινδύνου από την πτώχευση ενός από τους δύο συμβαλλόμενους (πεισθείτε γιατί). Γιαυτό και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι προσβάσιμα σε ιδιώτες επενδυτές σε αντίθεση με τα προθεσμιακά συμβόλαια που συνάπτονται συνήθως μόνο στη διατραπεζική αγορά.

Εδώ θα ασχοληθούμε περισσότερο με την τιμολόγηση των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης βάσει της αρχής της μη επιτηδειότητας. Μέχρι τώρα, οι "στρατηγικές επιτηδειότητας " που έχουμε θεωρήσει συνίστανται στην ουσία στην σύνθεση αρχικά ενός χαρτοφυλακίου με μηδενική αξία που σε μια μελλοντική στιγμή T θα έχει θετική απόδοση ανεξάρτητα από την κίνηση του πρωτογενούς προϊόντος. Αυτή είναι μια απλοϊκή στρατηγική όμως αφού δεν αξιοποιούμε τη δυνατότητα να μεταβάλουμε το χαρτοφυλάκιό μας χρησιμοποιώντας την πληροφορία που παρέχει η κίνηση του υποκείμενου προϊόντος μέχρι εκείνη τη στιγμή. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα την πρώτη στιγμή που η τιμή μιας μετοχής πέσει κάτω από ένα προκαθορισμένο επίπεδο, αν αυτή συμβεί πριν το χρόνο T, να αλλάξουμε τη θέση μας αγοράζοντας τη μετοχή με χρήματα από το λογαριασμό μετρητών του χαρτοφυλακίου μας. Μια τέτοια συναλλαγή προφανώς δεν μεταβάλει την αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή που διεκπεραιώνεται.

Ορισμός 1 Ένα χαρτοφυλάκιο που εξελίσσεται στο χρόνο με μια σειρά από συναλλαγές που εξαρτώνται μόνο από την πληροφορία που είναι διαθέσιμη ως τη στιγμή που συντελούνται και που δεν μεταβάλουν την αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή που συντελούνται ονομάζεται *αυτοχρηματοδοτούμενο*(self-financing).

Προφανώς, ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με μηδενική αρχική αξία και θετική απόδοση στο χρόνο T προσφέρει μια στρατηγική επιτηδειότητας. Θεωρώντας επομένως αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει περισσότερους περιορισμούς στην τιμολόγηση παραγώγων. Χρησιμοποιώντας ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο θα δείξουμε τώρα ότι:

Αν το επιτόκιο είναι σταθερό τότε η θεωρητικά δίκαιη μελλοντική τιμή ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης ταυτίζεται με την προθεσμιακή τιμή.

Απόδειξη: Έστω ότι r το ημερήσιο επιτόκιο. Θέτουμε $\Lambda = 1 + r$. Συνθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αρχικά αποτελείται από θετική θέση σε Λ συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με ωρίμανση έπειτα από N μέρες με μελλοντική τιμή f_0, αρνητική θέση σε Λ^N προθεσμιακά συμβόλαια στην προθεσμιακή τιμή F_0 με την ίδια ωρίμανση, και ένα άνευ κινδύνου λογαριασμό αρχικά χωρίς χρήματα. Η αρχική αξία ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου είναι 0. Στο τέλος κάθε μέρας τα κέρδη (ζημιές) από τη μεταβολή της μελλοντικής τιμής επενδύονται στον (ή καλύπτονται από τον) άνευ κινδύνου λογαριασμό. Επιπλέον αυξάνουμε τη θέση μας στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (με συμφωνίες στην επικρατούσα μελλοντική τιμή) κατά τρόπο ώστε να έχουμε συνολικά Λ φορές περισσότερα από όσα την προηγούμενη μέρα. Αυτή η αλλαγή θέσης δεν μεταβάλει την αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή που συντελείται αφού τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης έχουν μηδενική αξία όταν υπογράφονται. Επομένως το χαρτοφυλάκιό μας είναι αυτοχρηματοδοτούμενο.

Στο τέλος της πρώτης μέρας θα μεταφέρουμε ποσό $\Lambda(f_1 - f_0)$ στον άνευ κινδύνου λογαριασμό. Επιπλέον θα έχουμε θετική θέση σε Λ^2 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και αρνητική θέση σε Λ^N προθεσμιακά συμβόλαια.

Στο τέλος της δεύτερης μέρας το ποσό στον άνευ κινδύνου λογαριασμό θα τοκιστεί ενώ θα μεταφέρουμε σε αυτόν και τα κέρδη (ζημιές) από τα Λ^2 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης που κατέχουμε. Το χαρτοφυλάκιό μας λοιπόν θα αποτελείται από $\Lambda^2(f_2 - f_0)$ στον άνευ κινδύνου λογαριασμό, αρνητική θέση σε Λ^N προθεσμιακά συμβόλαια, ενώ τώρα θα έχουμε αυξήσει τη θέση μας στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης σε Λ^3.

Στο τέλος της ημερομηνίας ωρίμανσης θα έχουμε λοιπόν $\Lambda^N(f_N - f_0) = \Lambda^N(S_N - f_0)$ σε μετρητά, αρνητική θέση σε Λ^N προθεσμιακά συμβόλαια (με απόδοση $-\Lambda^N(S_N - F_0)$), και Λ^N συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης χωρίς αξία αφού στην παράδοση του προϊόντος καταβάλεται η τρέχουσα τιμή του. Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου μας θα είναι λοιπόν $V_T = \Lambda^N(F_0 - f_0)$ και συνεπώς αν $F_0 \neq f_0$ το χαρτοφυλάκιό μας (ή αρνητική θέση σε αυτό) θα συνιστούσε στρατηγική επιτηδειότητας. □

Σημείωση: Με το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα μπορούμε να δείξουμε ότι η θεωρητικά δίκαιη μελλοντική τιμή ταυτίζεται με την προθεσμιακή τιμή στην περίπτωση που το επιτόκιο μεταβάλλεται μεν καθημερινά, αλλά με τρόπο που είναι γνωστός εξ' αρχής και δεν εξαρτάται από τις μεταβολές της μελλοντικής τιμής. Αποδείξτε το.

5. Αμερικανικά δικαιώματα αγοράς/πώλησης

Θα προσπαθήσουμε τώρα να εξαγάγουμε περιορισμούς που η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει στην αρχική αξία $C(S_0, T, K)$ ενός αμερικάνικου δικαιώματος αγορας. Οι παρακάτω ανισότητες είναι είναι εύκολο να αποδειχθούν από την πρόταση 1:

$$T_1 \leq T_2 \Longrightarrow C(S_0, T_1, K) \leq C(S_0, T_2, K).$$

$$K_1 \leq K_2 \Longrightarrow C(S_0, T, K_1) \geq C(S_0, T, K_2).$$

$$C(S_0, T, K) \geq c(S_0, T, K). \tag{4}$$

Είναι ενδιαφέρον ότι αν η κατοχή του πρωτογενούς προϊόντος δεν έχει κόστος και δεν αποφέρει έσοδα (π.χ. μια μετοχή χωρίς μέρισμα) τότε και:

$$C(S_0, T, K) \leq c(S_0, T, K). \tag{5}$$

Η απόδειξη της (5) είναι πολύ ενδιαφέρουσα. Συνήθως αποδεικνύουμε ανισότητες επιτηδειότητας κατασκευάζοντας ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που έχει σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο μη αρνητική τελική αξία, συμπεραίνοντας έτσι ότι η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι μη αρνητική. Εδώ θέλουμε ένα άνω φράγμα για την αρχική αξία του αμερικανικού δικαιώματος αγοράς. Θα θέλαμε λοιπόν να κατασκευάσουμε ένα δυναμικό αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που αρχικά περιέχει (ανάμεσα σε άλλα προϊόντα) και μια αρνητική θέση στο αμερικανικό δικαίωμα αγοράς και του οποίου η τελική αξία είναι οπωσδήποτε μη αρνητική. Τώρα όμως τα πιθανά ενδεχόμενα εξέλιξης της αγοράς μέχρι τη στιγμή T περιλαμβάνουν όλους τους τρόπους που ο κάτοχος της θετικής θέσης στο αμερικανικό δικαίωμα μπορεί να επιλέξει να το ασκήσει.
Απόδειξη (της 5): Έστω χαρτοφυλάκιο Α που αποτελείται αρχικά από μια αρνητική θέση σε ένα αμερικανικό δικαίωμα αγοράς, το πρωτογενές προϊόν, ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K και αρνητική θέση σε ένα ομόλογο όψεως K και ωρίμανσης T. Στο ενδεχόμενο που το αμερικανικό δικαίωμα ασκηθεί σε κάποιο χρόνο $\tau \leq T$, θα πουλήσουμε το προϊόν από το χαρτοφυλάκιό μας έναντι ποσού K. Η αξία του ποσού αυτού στο χρόνο T τουλάχιστον καλύπτει την αρνητική θέση στο ομόλογο, οπότε στην ωρίμανση το χαρτοφυλάκιό μας θα έχει μη αρνητικό υπόλοιπο σε μετρητά και το δικαίωμα πώλησης, συνεπώς μη αρνητική αξία.
Αν το αμερικανικό δικαίωμα δεν ασκηθεί ποτέ (και αφού δεν ασκείται ούτε στην ωρίμανσή του αυτό συνεπάγεται ότι $S_T \leq K$) τότε στην ωρίμανση ασκούμε το ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, (πουλάμε το προϊόν του χαρτοφυλακίου μας έναντι K) και καλύπτουμε την αρνητική θέση στο ομόλογο, οπότε η αξία της θέσης μας είναι μηδενική. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η αξία του χαρτοφυλακίου μας στην ωρίμανση είναι μη αρνητική. Από την άλλη το χαρτοφυλάκιό μας είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, συνεπώς μη αρνητική θα είναι και η αρχική του αξία. Έτσι,

$$C(S_0, T, K) \leq p(S_0, T, K) + S_0 - KB(0, T) = c(S_0, T, K),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ισοτιμία των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης που έχουμε αποδείξει. $\square$

Από τις (4), (5) προκύπτει ότι για ένα προϊόν που η κατοχή του δεν αποφέρει έσοδα και δεν έχει κόστος ένα αμερικανικό δικαίωμα αγοράς αξίζει όσο και ένα ευρωπαϊκό. Η βέλτιστη στρατηγική για ένα κάτοχο αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς είναι να ΜΗΝ το ασκήσει πρώιμα.

Είναι πολύ διδακτικό να δοκιμάσετε την περίπτωση που το πρωτογενές προϊόν αποδίδει μέρισμα D στο χρόνο $t < T$. Μπορείτε να αποδείξετε τότε ότι το χαρτοφυλάκιο της παραπάνω απόδειξης έχει *αυστηρά* θετική αξία. Η ιδέα είναι η εξής: Αν το αμερικανικό δικαίωμα ασκηθεί πριν πληρωθεί το μέρισμα, τα έσοδα μας από την πώληση (επενδυμένα χωρίς κίνδυνο μέχρι το χρόνο T) υπερκαλύπτουν την αρνητική μας θέση στο ομόλογο. Αν πάλι το δικαίωμα ασκηθεί μετά το χρόνο πληρωμής του μερίσματος με την ίδια στρατηγική θα έχουμε στην ωρίμανση τουλάχιστον το μέρισμα και τους τόκους επ΄ αυτού. Χρησιμοποιήστε τώρα την σχέση ισοτιμίας των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης στην περίπτωση που έχουμε μέρισμα και συμπεράνετε ότι:

$$D \leq K(1 - e^{-r(T-t)}) \Longrightarrow C(S_0, T, K) = c(S_0, T, K).$$

Ας δούμε τώρα τι γίνεται στην περίπτωση των αμερικανικών δικαιωμάτων πώλησης. Οι επόμενες ανισότητες για την αρχική αξία $P(S_0, T, K)$ ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης είναι εύκολο να αποδειχθούν:

$$\begin{aligned} T_1 \leq T_2 &\Longrightarrow P(S_0, T_1, K) \leq P(S_0, T_2, K). \\ K_1 \leq K_2 &\Longrightarrow P(S_0, T, K_1) \leq P(S_0, T, K_2). \\ P(S_0, T, K) &\geq p(S_0, T, K). \end{aligned} \tag{6}$$

Σε αντίθεση με όσα είδαμε για το αμερικανικό δικαίωμα αγοράς, στην περίπτωση του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης είναι δυνατόν η πρώιμη εξάσκησή του να είναι καλύτερη στρατηγική από την αναμονή μέχρι την ωρίμανση. Αν ένας κάτοχος αμερικανικού δικαιώματος πώλησης ενός προϊόντος με τρέχουσα τιμή $S_0 < K$ το ασκήσει αμέσως, η θέση του στην ωρίμανση θα έχει αξία $(K - S_0)e^{rT}$. Αν πάλι δεν το ασκήσει πριν την ωρίμανση η τελική του θέση θα έχει αξία $(K - S_T)^+ \leq K$. Αν λοιπόν το S_0 είναι κατάλληλα μικρό ($S_0 \leq K(1 - e^{-rT})$) τότε σίγουρα η άμεση άσκηση είναι προτιμότερη της αναμονής μέχρι την ωρίμανση.

Στην περίπτωση των αμερικανικών δικαιωμάτων η ισοτιμία αγοράς πώλησης (για προϊόντα που η κατοχή τους δεν επιφέρει κόστος ή έσοδα) εκφράζεται μέσω της ακόλουθης διπλής ανισότητας:

$$S_0 - K \leq C(S_0, T, K) - P(S_0, T, K) \leq S_0 - Ke^{-rT}. \tag{7}$$

Απόδειξη (της 7): Το δεξί σκέλος προκύπτει άμεσα από τις (5), (6) και τη σχέση ισοτιμίας των αντίστοιχων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Για το αριστερό σκέλος θεωρήστε ένα χαρτοφυλάκιο που αρχικά περιέχει ένα αμερικανικό δικαίωμα αγοράς, αρνητική θέση σ΄ ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης, ένα ποσόν K επενδεδυμένο χωρίς κίνδυνο και αρνητική θέση στο πρωτογενές προϊόν. Ακολουθούμε τώρα την εξής στρατηγική:
Αν το αμερικανικό δικαίωμα πώλησης (στο οποίο έχουμε αρνητική θέση) ασκηθεί (στο χρόνο $\tau \leq T$), χρησιμοποιούμε μέρος από τα μετρητά μας για να κάνουμε την αγορά στην παραδοτέα τιμή K και με την αγορά αυτή καλύπτουμε την αρνητική μας θέση στο προϊόν. Έτσι η θέση μας στην ωρίμανση θα αποτελείται από το δικαίωμα αγοράς και ένα ποσόν $Ke^{rT}(1 - e^{-r\tau}) \geq 0$ και θα έχει μη αρνητική αξία.
Αν πάλι το αμερικανικό δικαίωμα πώλησης δεν ασκηθεί ποτέ (αυτό συνεπάγεται ότι $S_T > K$) τότε στην ωρίμανση ασκούμε το δικαίωμα αγοράς που κατέχουμε, καλύπτουμε την αρνητική μας θέση στο πρωτογενές προϊόν και μας μένουν $K(e^{rT} - 1)$ σε μετρητά.
Σε κάθε περίπτωση η αξία του (αυτοχρηματοδοτούμενου) χαρτοφυλακίου μας στο χρόνο T είναι μη αρνητική, οπότε και η αρχική του αξία πρέπει να είναι μη αρνητική, οπότε λαμβάνουμε το αριστερό σκέλος της (7) . □

Από την (7) προκύπτουν άμεσα εκτιμήσεις για την $P(S_0, T, K)$. Έχουμε λοιπόν:

$$(S_0 - Ke^{-rT})^- \leq P(S_0, T, K) \leq K$$

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι στα μέχρι τώρα αποτελέσματά μας δεν έχουμε κάνει κάποια υπόθεση για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος. Τα αποτελέσματα αυτά παραμένουν συνεπώς σε ισχύ οποιοδήποτε υπόδειγμα αγοράς κι αν υιοθετήσουμε. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε τέτοια υποδείγματα και θα δούμε πώς, με αυτή την επιπλέον υπόθεση, μπορούμε να εξαγάγουμε ακριβέστερα συμπεράσματα για την τιμολόγηση παραγώγων.