

ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΝ- ΧΕ2010
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι (παράδοση 12/10)

Άσκηση 1 Υπολογίστε τη συνάρτηση ταχύτητας που αντιστοιχεί στις κατανομές: α) κανονική με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 , β) εκθετική με παράμετρο λ , γ) Poisson με παράμετρο θ , δ) την κατανομή $\frac{\delta_{-1}+2\delta_0+\delta_1}{4}$.

Άσκηση 2 Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} \alpha + \dots + \binom{2n}{2n} \alpha^n \right].$$

Άσκηση 3 Δείξτε ότι αν ο \mathbb{X} είναι ένας μετρικός χώρος και $I : \mathbb{X} \mapsto [0, \infty]$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Για κάθε $c \geq 0$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{X} : I(x) \leq c\}$ είναι κλειστό.

β) Για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ στον \mathbb{X} τ.ώ. $x_n \rightarrow x$, έχουμε $I(x) \leq \liminf I(x_n)$.

Άσκηση 4 Αν η τ.μ. X παίρνει τιμές στο $[0,1]$ και $p = \mathbb{E}[X]$, δείξτε ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathbb{E}[e^{\theta X}] \leq pe^{\theta} + 1 - p,$$

και συμπεράνετε ότι από όλες τις κατανομές με φορέα στο $[0,1]$ και μέση τιμή p η κατανομή Bernoulli έχει τη μικρότερη συνάρτηση ταχύτητας.