ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

Άσκηση 1 Θεωρήστε τρία ενδεχόμενα Α,Β,Γ και γράψτε εκφράσεις για το ενδεχόμενο από τα Α,Β,Γ

α) να συμβεί μόνο το Α,
β) να συμβούν το Α και το Β αλλά όχι το Γ,
γ) να συμβούν και τα τρία,
δ) να συμβεί τουλάχιστον ένα,
ε) να συμβούν τουλάχιστον δύο,
στ) να συμβεί ακριβώς ένα,
ζ) να συμβούν ακριβώς δύο,
η) να μη συμβεί κανένα,
ϑ) να συμβουν το πολύ δύο.

Άσκηση 2 Στο παιχνίδι του μπριτζ τα 52 φύλλα της τράπουλας μοιράζονται (από 13) σε 4 παίκτες, N, S, E, W. Ας συμβολίζουμε με N_k το ενδεχόμενο ο παίκτης N να πάρει τουλάχιστον k άσους, και αντίστοιχα για τους άλλους παίκτες. Τι μπορούμε να πούμε για το πλήθος των άσων που έχει ο W σε κάθενα από τα παρακάτω ενδεχόμενα.

α) W_1^c,
β) $N_1 \cap S_2 \cap W_1$,
γ) $N_2 \cap S_2$,
δ) $(N_2 \cup S_2) \cap E_2$,
ε) $W_2 \setminus W_3$,
στ) $N_1^c \cap S_1^c \cap E_1^c$.

Άσκηση 3 Γράψτε τις 24 δυνατές διατάξεις των ψηφίων 1,2,3 και 4. Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{24}$ σε καθεμία από αυτές και συμβολίσουμε με A_i το ενδεχόμενο το ψηφίο i να εμφανίζεται στη θέση i, υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ και επαληθεύστε την ταυτότητα

$$\mathbb{P}\big[A_1 \cup A_2\big] = \mathbb{P}\big[A_1\big] + \mathbb{P}\big[A_2\big] - \mathbb{P}\big[A_1 \cap A_2\big].$$

Άσκηση 4 Δύο ενδεχόμενα A, B έχουν πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Ποιά είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η $\mathbb{P}\big[A \cap B\big]$; Δώστε παραδείγματα χώρων πιθανότητας και ενδεχομένων A, B όπου η πιθανότητα της τομής λαμβάνει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.

Άσκηση 5 Θεωρήστε το χώρο πιθανότητας $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \{0, 1\} \right\}$, και το ενδεχόμενο $A = \{P \in \Omega :$ ο P είναι αντιστρέψιμος$\}$. Αν αποδώσουμε την ίδια πιθανότητα σε κάθε σημείο του Ω υπολογίστε την πιθανότητα του A.

Άσκηση 6 Αν A, B, C είναι τρία οποιαδήποτε ενδεχόμενα δείξτε ότι

$$\mathbb{P}\big[A \cup B \cup C\big] = \mathbb{P}\big[A\big] + \mathbb{P}\big[B\big] + \mathbb{P}\big[C\big] - \mathbb{P}\big[A \cap B\big] - \mathbb{P}\big[B \cap C\big] - \mathbb{P}\big[C \cap A\big] + \mathbb{P}\big[A \cap B \cap C\big].$$

Άσκηση 7 Σ' ένα τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών οι 150 φοιτητές του πρώτου έτους πήραν τα μαθήματα Γραμμική Άλγεβρα (ΓΑ), Απειροστικός Λογισμός (ΑΛ) και Εισαγωγή στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές (ΗΥ). Στις εξετάσεις 10 φοιτητές δεν πέρασαν κανένα μάθημα. 125 φοιτητές πέρασαν το μάθημα ΗΥ, 120 φοιτητές πέρασαν το μάθημα ΓΑ και 100 φοιτητές πέρασαν το μάθημα ΑΛ. 80 φοιτητές πέρασαν τόσο το ΓΑ όσο και το ΑΛ, 90 φοιτητές πέρασαν τόσο το ΑΛ όσο και το ΗΥ, και 100 φοιτητές πέρασαν τόσο το ΓΑ όσο και το ΗΥ. Πόσοι φοιτητές πέρασαν όλα τα μαθήματα;

Άσκηση 8 Στρίβουμε ένα νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί το ίδιο αποτέλεσμα σε δύο διαδοχικές ρίψεις. Περιγράψτε το χώρο των δυνατών εκβάσεων Ω. Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{2^k}$ στα ενδεχόμενα όπου το παιχνίδι τελειώνει έπειτα από k ρίψεις υπολογίστε την πιθανότητα
α) Το παιχνίδι να τελειώσει σε 4 το πολύ ρίψεις.
β) Το παιχνίδι να τελειώσει έπειτα από άρτιο αριθμό ρίψεων.

Άσκηση 9 Τρεις παίκτες, Α,Β,Γ παίζουν σε ένα τουρνουά ταβλιού. Αρχικά παίζουν ο Α με τον Β και ο Γ κάθεται. Στη συνέχεια, ο νικητής κάθε παρτίδας παίζει με τον παίκτη που καθόταν στην προηγούμενη παρτίδα, ώσπου ένας παίκτης να κερδίσει δύο διαδοχικές παρτίδες, οπότε κερδίζει και το παιχνίδι.
α) Περιγράψτε το χώρων των δυνατών εκβάσεων του παιχνιδιού.
β) Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{2^k}$ στα ενδεχόμενα όπου το παιχνίδι τελειώνει έπειτα από k παρτίδες υπολογίστε την πιθανότητα νίκης κάθε παίκτη.