

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV

Άσκηση 1 Η γενετική ταυτότητα ενός ανθρώπου αποτελείται από περίπου 3×10^9 νουκλεοτίδια. Κάθε νουκλεοτίδιο χαρακτηρίζεται από μια από τις βάσεις αδε-νίνη, γουανίνη, κυτοσίνη ή θυμίνη. Πόσες είναι οι δυνατές γενετικές ταυτότητες; Συγκρίνετε με τον πληθυσμό της γης και με το πλήθος των ανθρώπων που έχουν υπάρξει στη γη όπως τον εκτιμάτε.

Άσκηση 2 Πόσα υποσύνολα έχει ένα σύνολο με n στοιχεία;

Άσκηση 3 Ρίχνουμε ένα ζάρι τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε τρία διαφορετικά αποτελέσματα;

Άσκηση 4 Οι αριθμοί $1, 2, \dots, n$ τοποθετούνται σε τυχαία σειρά. Ποια είναι η πιθανότητα οι αριθμοί $1, 2$ είναι οι δύο πρώτοι; Ποια είναι η πιθανότητα το 2 να εμφανιστεί ακριβώς μετά το 1 ;

Άσκηση 5 Ένα κουτί περιέχει 90 κανονικές και 10 ελαττωματικές βίδες. Αν διαλέξετε 10 βίδες στην τύχη από το κουτί ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλες κανονικές;

Άσκηση 6 Σε μια παρτίδα πόκερ παίρνετε 5 φύλλα τυχαία από τα 52 φύλλα μιας τράπουλας. Ποια είναι η πιθανότητα να έχετε 5 σπαθιά; Ποια είναι η πιθανότητα να έχετε τρεις άσους και 2 ρηγάδες; Ποια είναι η πιθανότητα να έχετε φουλ (μια τριάδα από ίδια φύλλα και ένα ζευγάρι από ίδια φύλλα διαφορετικά από αυτά της τριάδας);

Άσκηση 7 Ένας φοιτητής απαντά σε ένα διαγώνισμα με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής εντελώς στην τύχη. Αν κάθε ερώτηση έχει 5 πιθανές απαντήσεις και το διαγώνισμα έχει 10 ερωτήσεις, υπολογίστε την πιθανότητα να απαντήσει σωστά σε 5 ερωτήσεις. Υπολογίστε την πιθανότητα να απαντήσει σωστά σε τουλάχιστον 5 ερωτήσεις.

Άσκηση 8 Στο παιχνίδι Α ρίχνετε 6 ζάρια και κερδίζετε αν φέρετε τουλάχιστον 1 εξάρι. Στο παιχνίδι Β ρίχνετε 12 ζάρια και κερδίζετε αν φέρετε τουλάχιστον 2 εξάρια. Σε ποιο από τα δυο παιχνίδια έχετε μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσετε;

Άσκηση 9 Σ' ένα συρτάρι έχετε 6 διαφορετικά ζευγάρια κάλτσες. Διαλέγετε στην τύχη 4 κάλτσες. Ποια είναι η πιθανότητα να μπορείτε να σχηματίσετε ζευγάρι;

Άσκηση 10 Πόσα μονοπάτια ελαχίστου μήκους υπάρχουν που ξεκινούν από το κάτω αριστερά άκρο μιας 8×8 σκακιέρας και καταλήγουν στο πάνω δεξιά άκρο της;

Άσκηση 11 Ένα μοντέλο προτείνει ότι η πιθανότητα ένα ζευγάρι να έχει k παιδιά είναι $p_k = \left(\frac{11}{23}\right)^{-k}$, για $k = 1, 2, \dots$. Ποια πιθανότητα αποδίδει το μοντέλο στο να μην αποκτήσει ένα ζευγάρι παιδιά; Ποια είναι η πιθανότητα κατά το μοντέλο ένα ζευγάρι να έχει ακριβώς 2 κορίτσια;

Άσκηση 12 Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling εκτιμήστε ποια είναι η πιθανότητα αν στρίψουμε ένα νόμισμα 2000 φορές να φέρουμε ακριβώς 1000 φορές γράμματα.

Άσκηση 13 Τοποθετούμε τυχαία r σφαίρες σε n κελιά. Ποια είναι η πιθανότητα p_k το πρώτο κελί να έχει ακριβώς k σφαίρες; Αν τώρα $r, n \rightarrow \infty$, έτσι ώστε $r/n \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$, δείξτε ότι

$$p_k \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$