Μεταπτυχιακή Εργασία
Ηράκλειο Κρήτης, Σεπτέμβριος 2008

Θεωρία Στοχαστικού Χαρτοφυλακίου

Ελένη Δραμουντάνη

Επιβλέψας: Μιχάλης Λουλάκης

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών ¨Μαθηματικά και Εφαρμογές τους¨ των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Η Μεταπτυχιακή Εργασία κατατέθηκε στο τμήμα Μαθηματικών της σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης.
Επιβλέψας καθηγητής ήταν ο Μιχάλης Λουλάκης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.

- Ιωάννης Αθανασόπουλος

- Μιχάλης Κολουντζάκης

- Μιχάλης Λουλάκης

Ευχαριστίες

Η περάτωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας δεν είναι μόνο αποτέλεσμα προσωπικής μου εργασίας αλλά και συνεργασίας με ανθρώπους που με βοήθησαν πολύ.

Πρώτα απ΄ όλα θέλω να ευχαριστήσω το σύμβουλο καθηγητή μου, κ. Μιχάλη Λουλάκη, για τη συνεχή, άμεση και ουσιαστική καθοδήγησή του και την εξαιρετικά πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε, η οποία αποτέλεσε ένα βασικό συστατικό για την επιτυχή ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου που διακριτικά βοηθάει και στηρίζει τις προσπάθειές μου όλα αυτά τα χρόνια.

Ευχαριστώ επίσης φίλους και καθηγητές που με στήριξαν, με ενέπνευσαν και με βοήθησαν στην προσπάθειά μου να επιτύχω το στόχο μου. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τη φίλη μου Μαρίνα Μωραΐτη για την στήριξή της τα δύο τελευταία χρόνια και τα ευχάριστα διαλέιμματα κατά τη διάρκεια των απεριόριστων ωρών μελέτης.

Εισαγωγή

Η Θεωρία Στοχαστικού Χαρτοφυλακίου προέρχεται από την κλασική θεωρία χαρτοφυλακίων του Harry Markowitz (1952), ενώ η ιδέα της ξεκίνησε το 1995 από τον Fernholz (βλ. [F1]). Από εκεί και έπειτα αναπτύχθηκε ως ένα ευέλικτο πλαίσιο για την ανάλυση της συμπεριφοράς χαρτοφυλακίων και της δομής της αγοράς.

Η Θεωρία Στοχαστικού Χαρτοφυλακίου είναι μια ποσοτική περιγραφική θεωρία, που είναι συνεπής με τα παρατηρήσιμα χαρακτηριστικά των πραγματικών χρηματαγορών, είναι εφαρμόσιμη κάτω από πολύ γενικές συνθήκες και για την εφαρμογή της δεν απαιτεί τη γνώση παραμέτρων της αγοράς που είναι δύσκολο να εκτιμηθούν. Είναι ένα θεωρητικό εργαλείο για πρακτικές εφαρμογές.

Σαν θεωρητικό εργαλείο, η Στοχαστική Θεωρία Χαρτοφυλακίου περιγράφει τη δομή μιας αγοράς που αποτελείται από μετοχές και δίνει κάποιες απαντήσεις που αφορούν στη απόδοση και στη σύγκριση χαρτοφυλακίων. Στην πράξη εφαρμόζεται για να αναλύσει και να βελτιστοποιήσει χαρτοφυλάκια και αποτελεί τη βάση για επιτυχημένες επενδυτικές στρατηγικές την τελευταία δεκαετία.

Στην εργασία αυτή επιχειρούμε να περιγράψουμε τις βασικές ιδέες αυτής της θεωρίας και τα κυριότερα συμπεράσματα που αυτή συνεπάγεται. Η δομή της παρουσίασης έχει ως εξής.

Αρχικά θα αναφέρουμε μερικές βασικές έννοιες από το Στοχαστικό Λογισμό και στη συνέχεια θα εισαγάγουμε τις έννοιες της αγοράς και των χαρτοφυλακίων. Θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική στο χρόνο συμπεριφορά της αξίας ενός χαρτοφυλακίου και πώς αυτή επηρεάζεται από τη συμπεριφορά των προϊόντων που το συνθέτουν. Επιπλέον θα μελετήσουμε το σημαντικότερο ίσως από όλα τα χαρτοφυλάκια, το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Ένα από τα κύρια ενδιαφέροντά μας είναι και η διαφοροποίηση μιας αγοράς. Ο όρος διαφοροποίηση αντικατοπτρίζει την ιδέα ότι καμία εταιρεία δεν επιτρέπεται να κυριαρχήσει ολόκληρης της αγοράς, σε όρους σχετικής κεφαλαιοποίησης. Η διαφοροποίηση είναι μια διαισθητικά ευπρόσδεκτη έννοια μια και όλες οι ανεπτυγμένες αγορές διέπονται από αντιμονοπωλιακούς νόμους. Όπως θα δούμε το υπόδειγμα των Black & Scholes με σταθερούς συντελεστές, ένα από τα απλούστερα υποδείγματα που θεωρούνται ρεαλιστικά και χρησιμοποιείται στην πράξη για την ανάλυση παραγώγων και τη λύση προβλημάτων βελτιστοποίησης περιγράφει μια αγορά που δεν είναι διαφοροποιημένη. Προβλέπει δηλαδή ότι προϊόντος του χρόνου εμφανίζεται μια μετοχή που συγκεντώνει σχεδόν όλη την κεφαλαιοποίηση της αγοράς. Η κυρίαρχη αυτή μετοχή μπορεί να αλλάζει, σε κάθε περίπτωση όμως η αγορά περνά το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου σε αυτή την αδιαφοροποίητη κατάσταση.

Η Θεωρία Στοχαστικού Χαρτοφυλακίου έχει ως σημείο αφετηρίας ότι η αγορά είναι διαφοροποιημένη. Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματά της είναι ότι μια διαφοροποιημένη αγορά οδηγεί σε ευκαιρίες επιτηδειότητας. Συγκεκριμένα, θα δούμε ότι σε μια διαφοροποιημένη αγορά μπορεί να δημιουργηθεί ένα χαρτοφυλάκιο, που αποτελείται μόνο από θετικές θέσεις στα υπάρχοντα προϊόντα και επιτυγχάνει οπωσδήποτε καλύτερη απόδοση από την αγορά σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Θα δείξουμε ακόμα ότι, με κατάλληλα μεγάλο αρχικό κεφάλαιο, μια τέτοια στρατηγική επιτηδειότητας επιτυγχάνεται σε οσοδήποτε μικρό χρόνο θέλουμε.

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς η ύπαρξη τέτοιων στρατηγικών συνδέεται με την απουσία ισοδύναμων martingale μέτρων. Τα ισοδύναμα martingale μέτρα κατέχουν κεντρικό ρόλο στη σύγχρονη θεωρία χρηματοοικονομικών παραγώγων. Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Χρηματοοικονομίας η ύπαρξη τέτοιων μέτρων σχετίζεται με την απουσία στρατηγικών επιτηδειότητας, ενώ η μοναδικότητά τους με την πληρότητα της αγοράς, τη δυνατότητα δηλαδή να αναπαραχθεί και να τιμολογηθεί οποιοδήποτε παράγωγο προϊόν. Θα δούμε όμως ότι ακόμα και σε διαφοροποιημένες αγορές, που τέτοια μέτρα δεν υπάρχουν, τα προβλήματα της τιμολόγησης και της αντιστάθμισης παραγώγων έχουν εξίσου ικανοποιητική απάντηση.

Περιεχόμενα

1 Θεωρία Στοχαστικού Χαρτοφυλακίου

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να εισαγάγουμε τις βασικές αρχές της Θεωρίας Στοχαστικού Χαρτοφυλακίου. Θα περιγράψουμε το μοντέλο που υποθέτουμε για τη χρονική εξέλιξη τιμών μετοχών και θα δούμε πώς εξελίσσεται η αξία ενός χαρτοφυλακίου.
Θα μιλήσουμε για μια οικονομική αγορά που αποτελείται από n οικονομικά προϊόντα με κίνδυνο, τα οποία θα ονομάζονται μετοχές. Στο κεφάλαιο αυτό δε θα μας απασχολήσει η ύπαρξη προϊόντων χωρίς κίνδυνο στην αγορά. Μας ενδιαφέρει η μελέτη της συμπεριφοράς των μετοχών. Θα υποθέσουμε ότι ο αριθμός των εταιρειών στην αγορά είναι πεπερασμένος και καθορισμένος, οι εταιρείες δεν συγχωνεύονται ή διαλύονται και κάθε εταιρεία έχει μια μοναδική μετοχή, η οποία αντιπροσωπεύει τη συνολική κεφαλαιοποίησή της.

1.1 Βασικές Έννοιες

Στο σημείο αυτό θα παραθέσουμε συνοπτικά μερικούς βασικούς ορισμούς και αποτελέσματα, από το Στοχαστικό Λογισμό, απαραίτητα για την παρουσίασή μας. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [A.N.S, D, KS, RY], για περισσότερες λεπτομέρειες.

Στο μοντέλο μας οι αξίες των μετοχών περιγράφονται από στοχαστικές ανελίξεις ορισμένες σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, F, \mathbb{P})$ εφοδιασμένο με μια διήθηση $\{F_t\}_{t\geq 0}$.
Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ θα λέγεται *προσαρμοσμένη* (adapted) αν για κάθε $t \geq 0$ η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ είναι F_t-μετρήσιμη.

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ θα λέγεται *προβλέψιμη* (predictable) (βλ. [D], σελ.194) αν για κάθε $t \geq 0$ η $X(t)$ είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα

$$P = \sigma(\{A \in \Omega \times [0,t] : A = B_s \times (s,t] \text{ με } B_s \in F_s\})$$

Έστω $(\Omega, F, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας και $X(t)$ μια ανέλιξη. Θα λέμε ότι η $X(t)$ είναι $(\mathbb{P}, F_t)$-*martingale* αν $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty$ για κάθε t, και επιπλέον για κάθε s, t με $s \leq t$ ισχύει

$$\mathbb{E}(X(t)|F_s) = X(s), \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$$

Μια ανέλιξη θα λέγεται *submartingale* αν στον παραπάνω ορισμό ισχύει ότι $\mathbb{E}(X(t)|F_s) \geq X(s), \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$ και *supermartingale* αν ισχύει $\mathbb{E}(X(t)|F_s) \leq X(s), \quad \mathbb{P} - \sigma.\beta.$

Ένα δεξιά συνεχές martingale $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ θα λέμε ότι είναι *τετραγωνικά ολοκληρώσιμο* (συμβολικά $X(t) \in M^2$) αν $\mathbb{E}\big[X(t)^2\big] < \infty, \quad \forall t \geq 0$. Αν επιπλέον η X είναι συνεχής γράφουμε $X \in M^{2,c}$.

Λέγοντας ότι μια προσαρμοσμένη διαδικασία Aείναι *αύξουσα* θα εννοούμε ότι
(i) $A_0(\omega) = 0$
(ii) $t \mapsto A_t(\omega)$ είναι μη φθίνουσα και από δεξιά συνεχής συνάρτηση $\sigma.\beta.$

Μια αύξουσα διαδικασία θα ονομάζεται *φυσική* (natural) αν για κάθε φραγμένο, δεξιά συνεχές martingale $N = \{N_t,\ t \geq 0\}$

$$\mathbb{E}\int_{(0,t]} N_s dA_s = \mathbb{E}\int_{(0,t]} N_{s^-} dA_s$$

Για $X \in M^2$, η X^2 είναι ένα submartingale και άρα, από το θεώρημα αναπαράστασης του Doob (βλ. [KS], θεώρημα 4.10, σελ.24), υπαρχει μοναδική φυσική, προβλέψιμη διαδικασία $< X >_t$ τέτοια ώστε η διαδικασία $X_t^2 - < X >_t$ να είναι ένα martingale. Ονομάζουμε τη διαδικασία $< X >_t$ *τετραγωνική μεταβολή* της X.

Αν $X_t, Y_t \in M^2$ μπορούμε να ορίσουμε την *από κοινού διαδικασία μεταβολής* $< X, Y >$ με

$$< X, Y >_t = \frac{1}{4}\big[< X+Y >_t - < X-Y >_t \big].$$

Η από κοινού διαδικασία μεταβολής είναι προσαρμοσμένη. Είναι επίσης φραγμένης κύμανσης διαδικασία ως διαφορά αυξουσών διαδικασιών. Αν επιπλέον $X_t, Y_t \in M^{2,c}$, η διαδικασία $< X, Y >$ είναι συνεχής. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η από κοινού διαδικασία μεταβολής έχει τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) $| < X, Y > |^2 \leq < X >< Y >$
(ii) $< aX + bY, Z > = a < X, Z > + b < Y, Z >$
(iii) $< X, Y > = < Y, X >$

Θα λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή $\tau : \Omega \to (0,\infty)$ είναι *χρόνος στάσης* αν

$$\{\tau \leq t\} \in F_t, \quad \forall t \geq 0$$

Έστω $X(t)$ ανέλιξη συνεχούς χρόνου προσαρμοσμένη στην F_t, και έστω τ ένας χρόνος στάσης. Ορίζουμε τη *σταματημένη διαδικασία*

$$X_t^\tau(\omega) = X_{t\wedge\tau}(\omega) = X_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega).$$

Αν η διαδικασία X_t είναι martingale και τ είναι ένας χρόνος στάσης, τότε και η διαδικασία X_t^{τ} είναι martingale. (βλ. [KS], ορισμό 3.1, σελ.11)

Μια διαδικασία $X(t)$ θα λέμε ότι είναι ένα *συνεχές local martingale* αν ανήκει στην κλάση M_{loc}^c, όπου

$$M_{loc}^c = \{X | \exists \text{ ακολουθία χρόνων στάσης } T_n, \text{ με } T_n \nearrow \infty, \ \sigma.\beta. : \\ |X^{T_n}| \leq n, \ < X^{T_n} > \leq n, \ X^{T_n} \in M^{2,c}\}.$$

Οι έννοιες της τετραγωνικής μεταβολής και της από κοινού μεταβολής μπορούν να οριστούν και για local martingales. Έτσι παραδείγματος χάρη η $< X >$ είναι η μοναδική προβλέψιμη συνεχής ανέλιξη για την οποία $< X >_0 = 0$ και $X^2 - < X > \in M_{loc}^c$. Φυσικά η $< X >$ είναι αύξουσα.

Μια συνεχής διαδικασία X θα λέμε ότι είναι ένα συνεχές $(F_t, \mathbb{P})$-*semimartingale* αν $X = M + A$, όπου $M \in M_{loc}^c$ και A μια προβλέψιμη, φραγμένης κύμανσης, συνεχής διαδικασία με $A_0 = 0$. Για ένα semimartingale X ορίζουμε $< X > = < M >$. Μάλιστα η διάσπαση αυτή είναι μοναδική. (βλ. [KS], ορισμό 3.1, σελ.149)

1.2 Το βασικό Μοντέλο για Χαρτοφυλάκια

Υποθέτουμε ότι οι τιμές των μετοχών και οι αξίες των χαρτοφυλακίων είναι στοχαστικές διαδικασίες ορισμένες σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, F, \mathbb{P})$.
Η πηγή τυχαιότητας στα μοντέλα μας είναι η n-διάστατη κίνηση Brown

$$W = \{W(t) = (W_1(t), W_2(t), ..., W_n(t)), \ F_t, \ t \in [0, \infty)\}$$

ορισμένη στον $(\Omega, F, \mathbb{P})$, για κάποιο θετικό ακέραιο n, όπου F_t είναι η πλήρωση κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}$ της φυσικής διήθησης $F_t^w = \sigma(W_s; 0 \leq s \leq t), \quad t \leq T$. Δηλαδή αν N είναι η κλάση των συνόλων για τα οποία

$$C \in N \Leftrightarrow \exists B \in F_t^w : C \subset B \quad \& \quad \mathbb{P}(B) = 0,$$

τότε $F_t = \sigma(F_t^w \cup N)$. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την F_t αντί της F_t^w είναι ότι F_t είναι συνεχής με την έννοια ότι $\sigma(\cup_{s<t} F_s) = F_t = \cap_{s>t} F_s$ σε αντίθεση με την F_t^w που είναι μόνο αριστερά συνεχής. (βλ. [KS1], σημείωση 1.1, σελ.2)

Ορισμός 1 *Έστω n ένας θετικός ακέραιος και έστω μια οικογένεια από τιμές μετοχών X_i, $i = 1, \ldots, n$. Υποθέτουμε ότι η τιμή μετοχής X_i είναι μια στοχαστική διαδικασία για όλα τα $i = 1, \ldots, n$ που εξελίσσεται σύμφωνα με το μοντέλο:*

$$d \log X_i(t) = \gamma_i(t) dt + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu}(t) dW_\nu(t), \quad t \in [0, \infty) \tag{1}$$

όπου η $(W_1, ..., W_n)$ *είναι μια* n*-διάστατη κίνηση Brown, η* γ_i *είναι μια μετρήσιμη, προσαρμοσμένη διαδικασία με* $\int_0^T |\gamma_i(t)|dt < \infty$ *για κάθε* $T \in [0,\infty)$ *σ.β., και οι* $\xi_{i\nu}$, $\quad i, \nu = 1, \ldots, n$ *είναι μετρήσιμες, προσαρμοσμένες διαδικασίες που ικανοποιούν:*

(i) $\int_0^T (\xi_{i1}^2(t) + \ldots + \xi_{i\nu}^2(t))dt < \infty, \quad T \in [0,\infty) \quad \forall i = 1,\ldots,n \quad \sigma.\beta.$

(ii) $\lim_{t\to\infty} t^{-1}(\xi_{i1}^2(t) + \ldots + \xi_{in}^2(t)) \log\log t = 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n \quad \sigma.\beta.$

(iii) $\xi_{i1}^2(t) + \ldots + \xi_{in}^2(t) > 0, \quad t \in [0,\infty), \quad \forall i = 1,\ldots,n \quad \sigma.\beta.$

Η σχέση (1) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\log X_i(t) = \log X_i(0) + \int_0^t \gamma_i(s)ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s), \quad t \in [0,\infty),$$

για κάθε $i = 1,\ldots,n$ και σε εκθετική μορφή η τιμή της μετοχής i γράφεται:

$$X_i(t) = X_i(0)\exp\left(\int_0^t \gamma_i(s)ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s)\right), \quad t \in [0,\infty) \quad (2)$$

όπου $X_i(0)$ είναι μια θετική σταθερά που αναπαριστά την αρχική τιμή της μετοχής i. Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι κάθε εταιρεία έχει μια μοναδική μετοχή, η $X_i(t)$ αναπαριστά τη συνολική κεφαλαιοποίηση της εταιρείας i στο χρόνο t. Συχνά η διαδικασία της τιμής της μετοχής X θα αναφέρεται απλά ως μετοχή. Από τη σχέση (2) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $X_i(t) > 0$ για όλα τα $t \in [0,\infty)$ και για όλα τα $i = 1,\ldots,n$.

Στη σχέση (1), η διαδικασία γ_i ονομάζεται *επιτόκιο ανάπτυξης* (growth rate process) της διαδικασίας X_i. Το επιτόκιο ανάπτυξης είναι μια ορολογία του λογαριθμικού μοντέλου. Στην κλασική Θεωρία Χαρτοφυλακίου χρησιμοποιείται ο ρυθμός απόδοσης (rate of return), που θα εισαγάγουμε παρακάτω. Εμείς θα ασχοληθούμε με το επιτόκιο ανάπτυξης διότι είναι καλύτερος δείκτης για μακροχρόνια συμπεριφορά. Θα αποδείξουμε αργότερα ότι το επιτόκιο ανάπτυξης ενός χαρτοφυλακίου καθορίζει την μακροχρόνια συμπεριφορά της αξίας του.
Η διαδικασία $\xi_{i\nu}$ ονομάζεται *μεταβλητότητα* (volatility) της διαδικασίας X_i ως προς την W_ν και αναπαριστά την ευαισθησία της διαδικασίας X_i στην ν-οστή πηγή αβεβαιότητας W_ν.

Από τον ορισμό 1 φαίνεται ότι για κάθε i η διαδικασία $logX_i(t)$ είναι ένα

συνεχές semimartingale με local martingale μέρος $\int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s)$, και φραγμένης κύμανσης μέρος $\int_0^t \gamma_i(s)ds$, για $t \in [0,\infty)$.
Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην συνάρτηση $X_i(t) = \exp(\log X_i(t))$ έχουμε

$$dX_i(t) = X_i(t)d\log X_i(t) + \frac{1}{2}X_i(t)d < \log X_i >_t, \quad t \in [0,\infty),\ \sigma.\beta.$$

όπου

$$\begin{aligned} < \log X_i >_t &\overset{(1)}{=} < \int_0^{\cdot} \gamma_i(s)ds + \int_0^{\cdot} \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s) >_t \\ &= < \int_0^{\cdot} \gamma_i(s)ds >_t + < \int_0^{\cdot} \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s) >_t \\ &= < \int_0^{\cdot} \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s) > \\ &= \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}^2(s)d < W_\nu >_s \\ &= \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}^2(s)ds, \end{aligned}$$

όπου στη πρότελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει ότι $< W_\nu, W_\mu >= 0$ για $\nu \neq \mu$. Οπότε η X είναι ένα συνεχές semimartingale που ικανοποιεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} dX_i(t) &\overset{(1)}{=} X_i(t)\gamma_i(t)dt + X_i(t)\sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) + \frac{1}{2}X_i(t)\sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}^2(t)dt \\ &= \left(\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}^2(t)\right) X_i(t)dt + X_i(t)\sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) \quad (3) \end{aligned}$$

$t \in [0,\infty)$, $\sigma.\beta.$ Αν ορίσουμε το *ρυθμό απόδοσης* (rate of return) α_i της μετοχής i ως

$$\alpha_i(t) = \gamma_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}^2(t), \quad (4)$$

η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$dX_i(t) = \alpha_i(t)X_i(t)dt + X_i(t)\sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t), \quad t \in [0,\infty),\ \sigma.\beta.$$

Το παραπάνω γράφεται και στη μορφή

$$\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = \alpha_i(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t), \quad t \in [0,\infty), \ \sigma.\beta. \tag{5}$$

όπου $\frac{dX_i(t)}{X_i(t)}$ ερμηνεύεται ως την στιγμιαία απόδοση της X_i, δηλαδή μας δίνει τη σχετική μεταβολή της τιμής της μετοχής i σε χρόνο dt. Με την ίδια λογική η $d\log X_i(t)$ ερμηνεύεται ως η στιγμιαία λογαριθμική ή γεωμετρική απόδοση της X_i.

Έστω ο πίνακας $\xi(t) = \left(\xi_{i\nu}(t)\right)_{1\le i,\nu\le n}$. Ορίζουμε την διαδικασία συνδιασποράς (covariance process) σ όπου $\sigma(t) = \xi(t)\xi^T(t)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $t \in [0,\infty)$,

$$x\sigma(t)x^T = x\xi(t)\xi^T(t)x^T = \left(x\xi(t)\right)\left(x\xi(t)\right)^T \ge 0 \tag{6}$$

και άρα ο $\sigma(t)$ είναι θετικά ημιορισμένος για όλα τα $t \in [0,\infty)$.
Η διαδικασία συνδιασποράς σ συνδέεται με την από κοινού διαδικασία μεταβολής των $\log X_i$ και $\log X_j$, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\sigma_{ij}(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu}(t)\xi_{j\nu}(t)dt = d < \log X_i, \log X_j > \tag{7}$$

$t \in [0,\infty)$, $\sigma.\beta.$ διότι, από την ταυτότητα Kunita-Watanabe (βλ. [KS], πρόταση 2.14, σελ.42)

$$\begin{aligned}
< \log X_i, \log X_j > &\overset{(1)}{=} < \int_0^{\cdot}\gamma_i ds + \int_0^{\cdot}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}dW_\nu, \int_0^{\cdot}\gamma_j ds + \int_0^{\cdot}\sum_{\nu=1}^{n}\xi_{j\nu}dW_\nu >_t \\
&= < \int_0^{\cdot} \sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s), \int_0^{\cdot} \sum_{\nu=1}^{n}\xi_{j\nu}(s)dW_\nu(s) >_t \\
&= \int_0^t \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \xi_{i\nu}(s)\xi_{j\mu}(s)d < W_\nu, W_\mu >_s \\
&= \int_0^t \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \xi_{i\nu}(s)\xi_{j\mu}(s)\delta_{\nu\mu}ds \\
&= \int_0^t \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu}(s)\xi_{j\nu}(s)ds.
\end{aligned}$$

Στον ορισμό 1 υποθέσαμε ότι οι διαδικασίες $\xi_{i\nu}$ είναι τοπικά τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, άρα για όλα τα i και j έχουμε

$$\int_0^t |\sigma_{ij}(s)|ds < \infty, \quad t \in [0,\infty), \ \sigma.\beta.$$

Στην περίπτωση που $i = j$ η διαδικασία σ_{ii} θα λέγεται μεταβλητότητα (covariance process) της μετοχής X_i για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Ορισμός 2 *Μια αγορά είναι μια οικογένεια $M = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ από μετοχές, όπου κάθε μία από αυτές ορίζεται όπως στην σχέση (2), και ο πίνακας $\sigma(t)$ είναι αντιστρέψιμος για όλα τα $t \in [0, \infty)$, σ.β.*

Από τον ορισμό 2 και τη σχέση (6), προκύπτει ότι για τα προϊόντα μιας αγοράς ο πίνακας σ είναι θετικά ορισμένος για όλα τα $t \in [0, \infty)$, $\sigma.\beta.$

Η αγορά Μ θα λέμε ότι είναι *μη εκφυλισμένη* (nondegenerate) αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$x\sigma(t)x^T \geq \epsilon ||x||^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0, \infty),\ \sigma.\beta. \tag{8}$$

Η αγορά Μ έχει *φραγμένη διασπορά* (bounded variance) αν υπάρχει $\Lambda > 0$ τέτοιο ώστε

$$x\sigma(t)x^T \leq \Lambda ||x||^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0, \infty),\ \sigma.\beta. \tag{9}$$

Ορισμός 3 *Ένα χαρτοφυλάκιο σε μια αγορά M είναι μια μετρήσιμη, προσαρμοσμένη διαδικασία $\pi, \pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \dots \pi_n(t))$ για $t \in [0, \infty)$, τέτοια ώστε το π να είναι σ.β. φραγμένο στο $[0, \infty)$ και $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$, για $t \in [0, \infty)$, σ.β.*

Η συνιστώσα π_i ενός χαρτοφυλακίου αναπαριστά το ποσοστό της μετοχής i σε ένα χαρτοφυλάκιο.
Θα λέμε ότι δύο χαρτοφυλάκια θα είναι ίσα ή ισοδύναμα αν τα βάρη τους είναι ίσα για όλα τα $t \in [0, \infty)$, $\sigma.\beta.$ Ένα χαρτοφυλάκιο θα λέμε ότι περιέχει θετική θέση σε κάποια μετοχή, αν τα αντίστοιχα βάρη της είναι θετικά, ενώ θα λέμε ότι περιέχει αρνητική θέση αν τα αντίστοιχα βάρη της είναι αρνητικά. Αν το χαρτοφυλάκιο δεν περιέχει μια δοσμένη μετοχή, τα βάρη της θα είναι ίσα με 0.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο π και έστω $Z_\pi(t) > 0$ η αξία του στον χρόνο t. Το ύψος της επένδυσης στην i-οστή μετοχή X_i είναι:

$$\pi_i(t) Z_\pi(t),$$

έτσι αν η τιμή της μετοχής X_i μεταβληθεί κατά dX_i, η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου μας θα είναι:

$$\pi_i(t) Z_\pi(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)}.$$

Θα λέμε ότι το χαρτοφυλάκιο π είναι αυτοχρηματοδοτούμενο αν η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου προέρχεται αποκλειστικά από τις μεταβολές της αξίας των προϊόντων του, δηλαδή

$$dZ_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) Z_\pi(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} \tag{10}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει ότι $\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)}$ είναι η στιγμιαία απόδοση που μας αποφέρουν οι επενδύσεις του χαρτοφυλακίου μας. Στο εξής θα θεωρούμε αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια.

Ακολουθεί μια πρόταση που παρουσιάζει το Z_π σε διαφορική μορφή.

Πρόταση 1 *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο στην αγορά M. Τότε η διαδικασία Z_π ικανοποιεί:*

$$d\log Z_\pi(t) = \gamma_\pi(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) \tag{11}$$

για $t \in [0,\infty)$, σ.β., όπου

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i(t) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\right) \tag{12}$$

Οι ιδιότητες των γ_i, π_i και $\xi_{i\nu}$ εξασφαλίζουν ότι η $\log Z_\pi$ είναι ένα συνεχές semimartingale. Για κάθε αρχική αξία $Z_\pi(0) > 0$ η σχέση (11) μπορεί να γραφεί ως

$$Z_\pi(t) = Z_\pi(0)\exp\left(\int_0^t \gamma_\pi(s)ds + \int_0^t \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(s)\xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s)\right) \tag{13}$$

Είναι φανερό ότι $Z_\pi(t) > 0$ για κάθε $t \in [0,\infty)$, $\sigma.\beta.$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η Z_π είναι ένα συνεχές semimartingale που ικανοποιεί τη σχέση (10). Τότε

$$\begin{aligned} dZ_\pi(t) &= Z_\pi(t)\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} \\ &\overset{(5)}{=} Z_\pi(t)\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\alpha_i(t)dt + Z_\pi(t)\sum_{i,\nu=1}^n \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) \\ &\overset{(4)}{=} Z_\pi(t)\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\left(\gamma_i(t)+\frac{1}{2}\sigma_{ii}(t)\right)dt \\ &+ Z_\pi(t)\sum_{i,\nu=1}^n \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t). \end{aligned} \tag{14}$$

Τώρα, θέτουμε $Y(t) = \int_0^t \gamma_\pi(s)ds + \int_0^t \sum_{i,\nu=1}^n \pi_i(s)\xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s)$, και εφαρμόζουμε τον κανόνα του Itô στο semimartingale $Z_\pi(t)e^{-Y(t)}$, οπότε και έχουμε

$$\begin{aligned} d\left(Z_\pi(t)e^{-Y(t)}\right) &= e^{-Y(t)}dZ_\pi(t) - e^{-Y(t)}Z_\pi(t)dY(t) \\ &- e^{-Y(t)}d<Z_\pi, Y>_t + \frac{1}{2}e^{-Y(t)}Z_\pi(t)d<Y>_t, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} d<Y>_t &= <\gamma_\pi(t)dt + \sum_{i,\nu=1}^n \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t)> \\ &= <\sum_{i,\nu=1}^n \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t), \sum_{j,\mu=1}^n \pi_j(t)\xi_{j\mu}(t)dW_\mu(t)> \\ &= \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^n \left(\pi_i(t)\pi_j(t)\xi_{i\nu}(t)\xi_{j\mu}(t)\right)d<W_\nu, W_\mu>_t \\ &= \sum_{i,j,\mu,\nu=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\xi_{i\nu}(t)\xi_{j\mu}(t)\delta_{\nu\mu}dt \\ &= \sum_{i,j,\nu=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\xi_{i\nu}(t)\xi_{j\nu}(t)dt \\ &\overset{(7)}{=} \sum_{i,j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)dt, \end{aligned} \tag{15}$$

και

$$\begin{aligned}
d < Z_\pi, Y >_t &\overset{(14)}{=} Z_\pi(t) < \sum_{j,\mu=1}^{n} \pi_j(t)\xi_{j\mu}(t)dW_\mu(t), \sum_{i,\nu=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t) > \\
&= Z_\pi(t) \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)dt.
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned}
d\Big(Z_\pi(t)e^{-Y(t)}\Big) &= e^{-Y(t)}\Big(Z_\pi(t)\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\Big(\gamma_i(t)+\frac{1}{2}\sigma_{ii}(t)\Big)dt \\
&+ Z_\pi(t)\sum_{i,\nu=1}^{n}\pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t)\Big) \\
&- e^{-Y(t)}Z_\pi(t)\Big(\gamma_\pi(t)dt+\sum_{i,\nu=1}^{n}\pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t)\Big) \\
&- e^{-Y(t)}Z_\pi(t)\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)dt \\
&+ \frac{1}{2}e^{-Y(t)}Z_\pi(t)\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)dt \\
&= e^{-Y(t)}Z_\pi(t)\Big(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\Big(\gamma_i(t)+\frac{1}{2}\sigma_{ii}(t)\Big) \\
&- \gamma_\pi(t)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\Big)dt \\
&\overset{(12)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Άρα $Z_\pi(t)e^{-Y(t)}$ είναι σταθερό.

□

Η διαδικασία γ_π στην σχέση (12) λέγεται *επιτόκιο ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου* π (portfolio growth rate process). Ορίζουμε την διασπορά $\sigma_{\pi\pi}$ του χαρτοφυλακίου π (portfolio variance process) ως

$$\sigma_{\pi\pi}(t) = \sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t) = \pi^T(t)\sigma(t)\pi(t). \tag{16}$$

Τότε

$$< \log Z_\pi >_t = \int_0^t \sigma_{\pi\pi}(s)ds, \quad t\in[0,\infty),\ \sigma.\beta.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô για την $Z_\pi = \exp(\log Z_\pi)$ έχουμε

$$\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} = d\log Z_\pi(t) + \frac{1}{2}\sigma_{\pi\pi}(t)dt, \quad t \in [0,\infty),\ \sigma.\beta. \tag{17}$$

Αν αγορά M έχει φραγμένη διασπορά, τότε και η διαδικασία διασποράς του χαρτοφυλακίου $\sigma_{\pi\pi}$ είναι $\sigma.\beta.$ φραγμένη στο $[0,\infty)$ για όλα τα χαρτοφυλάκια π.

Αντίστοιχα ορίζουμε τη συνδιασπορά $\sigma_{\pi\eta}$ δυο χαρτοφυλακίων π και η ως

$$\sigma_{\pi\eta}(t)dt = d < \log Z_\pi, \log Z_\eta >_t = \eta^T(t)\sigma(t)\pi(t)dt. \tag{18}$$

Ορίζουμε την διαδικασία γ_π^* ως

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\right), \quad t \in [0,\infty) \tag{19}$$

$$\overset{(16)}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sigma_{\pi\pi}(t)\right), \quad t \in [0,\infty) \tag{20}$$

Από τη σχέση (20) έπεται ότι γ_π^* είναι το μισό της διαφοράς του μέσου όρου με βάρη της διασποράς των ατομικών μετοχών και της διασποράς του χαρτοφυλακίου. Έτσι το γ_π^* μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μέτρο αποτελεσματικότητας της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου στην μείωση της μεταβλητότητας της Z_π.

Με την παραπάνω παρατήρηση η (12) γράφεται

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^n \pi_i(t)\gamma_i(t) + \gamma_\pi^*(t). \tag{21}$$

Η διαδικασία γ_π^* ονομάζεται *υπερβάλλον επιτόκιο ανάπτυξης* (excess growth rate process) του χαρτοφυλακίου π. Αν τα βάρη του χαρτοφυλακίου π είναι μη αρνητικά,

$$\gamma_\pi^*(t) \geq 0, \quad t \in [0,\infty),\ \sigma.\beta. \tag{22}$$

Πράγματι, από την ανισότητα Cauchy - Schwarz

$$\begin{aligned}
\sigma_{\pi\pi}(t) &= \sum_{i,j=1}^n \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t) \\
&\overset{(16)}{=} \sum_{\nu=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n \pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)\Big)^2 \\
&\leq \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=1}^n \pi_i(t)\xi_{i\nu}^2(t) \\
&= \sum_{i=1}^n \pi_i(t)\sigma_{ii}(t),
\end{aligned}$$

οπότε, από τη σχέση (20), έπεται ότι $\gamma_\pi^*(t) \geq 0$.

Πόρισμα 1 *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο και Z_π η συνολική αξία του. Τότε*

$$d \log Z_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) d \log X_i(t) + \gamma_\pi^*(t) dt, \quad t \in [0, \infty), \ \sigma.\beta. \tag{23}$$

Απόδειξη: Προκύπτει πολύ εύκολα από τις σχέσεις (10) και (17).

□

Ορισμός 4 *Έστω δύο χαρτοφυλάκια π και η. Η διαδικασία σχετικής απόδοσης του χαρτοφυλακίου π σε σύγκριση με το χαρτοφυλάκιο η ορίζεται να είναι*

$$\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\eta(t)}\right), \quad t \in [0, \infty).$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο χαρτοφυλάκια π και η. Τότε $\sigma.\beta.$, για $t \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned}
d \log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\eta(t)}\right) &= d \log Z_\pi(t) - d \log Z_\eta(t) \\
&\overset{(23)}{=} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) d \log X_i(t) + \gamma_\pi^*(t) dt - d \log Z_\eta(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \left(d \log X_i(t) - d \log Z_\eta(t)\right) + \gamma_\pi^*(t) dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) d \log\left(\frac{X_i(t)}{Z_\eta(t)}\right) + \gamma_\pi^*(t) dt.
\end{aligned}$$

Αυτές οι δυο σχέσεις μας λένε ότι το υπερβάλλον επιτόκιο ανάπτυξης είναι αναλλοίωτο (numeraire invariant) ως προς το προϊόν αναφοράς, υπό την έννοια ότι είτε μετράμε τις απόλυτες αξίες μετοχών και χαρτοφυλακίων (X_i, Z_π), είτε τις σχετικές τους αξίες ως προς ένα χαρτοφυλάκιο η $(\frac{X_i}{Z_\eta}, \frac{Z_\pi}{Z_\eta})$, το γ_π^* δίνεται από την ίδια σχέση.

1.3 Επιτόκιο Ανάπτυξης Χαρτοφυλακίων

Παραδοσιακά, η θεωρία χαρτοφυλακίου δίνει έμφαση στον αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης και στη διασπορά των μετοχών ενός χαρτοφυλακίου. Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι το επιτόκιο ανάπτυξης είναι αυτό που καθορίζει τη μακροχρόνια συμπεριφορά των μετοχών ενός χαρτοφυλακίου. Έτσι για μακροχρόνιες επενδύσεις, είναι προτιμότερο να σκεφτόμαστε το επιτόκιο ανάπτυξης αντί του ρυθμού απόδοσης.

Πρόταση 2 *Για κάθε χαρτοφυλάκιο* π*, σε μια αγορά* M*, ισχύει:*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\log Z_\pi(T)-\int_0^T\gamma_\pi(t)dt\right)=0,\quad \sigma.\beta.$$

Απόδειξη: Από τη σχέση (11), για $t\in[0,\infty)$, $\sigma.\beta.$

$$\log\frac{Z_\pi(t)}{Z_\pi(0)}=\int_0^t\gamma_\pi(s)ds+\int_0^t\sum_{i,\nu=1}^{n}\pi_i(s)\xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s).$$

Για $t\in[0,\infty)$, έστω

$$\begin{aligned}V(t) &= \log\frac{Z_\pi(t)}{Z_\pi(0)}-\int_0^t\gamma_\pi(s)ds\\ &= \int_0^t\sum_{i,\nu=1}^{n}\pi_i(s)\xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s)\end{aligned}$$

Τότε V είναι ένα συνεχές martingale, με τετραγωνική μεταβολή

$$\begin{aligned}< V >_t &= < \log\frac{Z_\pi(t)}{Z_\pi(0)} >\\ &= \int_0^t\sigma_{\pi\pi}(s)ds,\quad t\in[0,\infty),\ \sigma.\beta.\end{aligned}\tag{24}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sigma_{\pi\pi}(t)\log\log t &\overset{(16)}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{i,j=1}^{n}\pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t)\log\log t\\ &\overset{(7)}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{i}^{n}\pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)\right)\left(\sum_{j}^{n}\pi_j(t)\xi_{j\nu}(t)\right)\log\log t\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{i}^{n}\pi_i(t)\xi_{i\nu}(t)\right)^2\log\log t\\ &\leq \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{i}^{n}\pi_i^2(t)\right)\left(\sum_{i}^{n}\xi_{i\nu}^2(t)\right)\log\log t\\ &= 0\end{aligned}$$

Όπου για την προτελευταία ανισότητα εφαρμόσαμε την ανισότητα Cauchy - Schwarz, ενώ για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι τα βάρη του χαρτοφυλακίου είναι φραγμένα και τη συνθήκη (ii) του ορισμού 1.

Άρα, θεωρώντας ένα $A > 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2} < V >_t \log\log t &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\left(\int_0^t \sigma_{\pi\pi}(s)ds\right)\log\log t \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\log\log t\int_0^A \sigma_{\pi\pi}(s)ds \\
&+ \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\log\log t\int_A^t \sigma_{\pi\pi}(s)ds \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\log\log t\int_A^t \sigma_{\pi\pi}(s)ds \\
&\leq \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_A^t \frac{1}{s}\log\log s\sigma_{\pi\pi}(s)ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

Επομένως από το ακόλουθο λήμμα έχουμε

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}V(t) = 0, \quad \sigma.\beta.$$

που είναι και το ζητούμενο της πρότασης.

□

Λήμμα 1 *Έστω M ένα συνεχές local martingale τέτοιο ώστε*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2} < M >_t \log\log t = 0, \quad \sigma.\beta. \tag{25}$$

Τότε

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}M(t) = 0, \quad \sigma.\beta.$$

Απόδειξη: Επεκτείνοντας τον χώρο πιθανότητας όπου είναι απαραίτητο, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μονοδιάστατη κίνηση Brown W_0 ανεξάρτητη του M. Τότε ορίζουμε την διαδικασία $M_0(t) = M(t) + W_0(t), \quad t \in [0,\infty)$. Η διαδικασία M_0 είναι ένα συνεχές local martingale, ως άθροισμα local martingales, με τετραγωνική μεταβολή

$$\begin{aligned}
< M_0 >_t &= < M + W_0 >_t = < M + W_0, M + W_0 >_t \\
&= < M, M >_t + < W_0, M >_t + < M, W_0 >_t + < W_0, W_0 >_t \\
&= < M >_t + t, \quad t \in [0,\infty),\ \sigma.\beta. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2} < M_0 >_t \log\log t &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2} < M >_t \log\log t + \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2} t\log\log t \\
&\overset{(25)}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\log t \\
&= 0, \quad \sigma.\beta. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Άρα η διαδικασία $< M_0 >_t$ αυξάνει πιο αργά από το t^2.
Επιπλέον,

$$\lim_{t\to\infty} < M_0 >_t = \lim_{t\to\infty}(< M >_t + t) = \infty \quad \sigma.\beta. \qquad (28)$$

Έτσι από το θεώρημα αλλαγής χρόνου (Time-Change) για local martingales (βλ. [KS], θεώρημα 4.6, σελ.174), υπάρχει μονοδιάστατη κίνηση Brown B με

$$B_{< M_0 >_t} = M_0(t), \quad t \in [0,\infty), \ \sigma.\beta. \qquad (29)$$

Λόγω της σχέσης (28), μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο του επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου, ο οποίος, με τη σχέση (29), μας δίνει

$$\limsup_{< M_0 >_t\to\infty}\frac{|M_0(t)|}{\sqrt{2 < M_0 >_t \log\log < M_0 >_t}} = 1 \quad \sigma.\beta.$$

ή ισοδύναμα

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|M_0(t)|}{\sqrt{2 < M_0 >_t \log\log < M_0 >_t}} = 1 \quad \sigma.\beta. \qquad (30)$$

Επειδή η διαδικασία $< M_0 >_t$ αυξάνει πιο αργά από το t^2, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\log t$ με το $\log < M_0 >_t$ στη σχέση (27). Τότε

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2} < M_0 >_t \log\log < M_0 >_t = 0 \quad \sigma.\beta.$$

Άρα

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sqrt{< M_0 >_t \log\log < M_0 >_t} = 0 \quad \sigma.\beta.$$

Από αυτό και τη σχέση (30) έχουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}M_0(t) = 0 \quad \sigma.\beta.$$

Τέλος, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών ισχύει

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}W_0(t) = 0 \quad \sigma.\beta.$$

και από τις δύο τελευταίες παρατηρήσεις έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}M(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}M_0(t) - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}W_0(t) = 0 \quad \sigma.\beta.$$

$\square$

Ειδικότερα αν ένα χαρτοφυλάκιο περιέχει μια μόνο μετοχή, η πρόταση 2 δίνει

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\log X(T) - \int_0^T \gamma(t)dt\right) = 0, \quad \sigma.\beta. \tag{31}$$

όπου $\gamma(t)$ είναι το επιτόκιο ανάπτυξης της μετοχής X.

Η πρόταση 2 δείχνει ότι το επιτόκιο ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου καθορίζει την απόδοση του χαρτοφυλακίου, ειδικά στη μακροχρόνια περίοδο. Όπως γνωρίζουμε και από την σχέση (12), το επιτόκιο ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου είναι ο μέσος όρος με βάρη των επιτοκίων ανάπτυξης των αντίστοιχων μετοχών, συν το υπερβάλλον επιτόκιο ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου. Για χαρτοφυλάκια που περιέχουν μετοχές μεγάλης αξίας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι μετοχές έχουν περίπου το ίδιο επιτόκιο ανάπτυξης. Σε αυτή τη περίπτωση ο πρώτος όρος για το επιτόκιο ανάπτυξης θα αντικατασταθεί από το κοινό επιτόκιο ανάπτυξης των μετοχών, και το επιτόκιο ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου θα εξαρτάται μόνο από το υπερβάλλον επιτόκιο ανάπτυξης. Λόγω αυτής της σημαντικότητας του υπερβάλλοντος επιτοκίου ανάπτυξης, χρειάζεται να αναπτύξουμε εργαλεία για να μπορέσουμε να το υπολογίσουμε.

2 Μακροπρόθεσμοι Ρυθμοί Ανάπτυξης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε για το σημαντικότερο ίσως χαρτοφυλάκιο, το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Θα αναλύσουμε τη μακροχρόνια συμπεριφορά μετοχών, χαρτοφυλακίων, ακόμα και της ίδιας της αγοράς. Σε αυτή μας την ανάλυση θα ήταν προτιμότερο να σκεφτόμαστε το χρονικό μέσο όρο των τιμών αντί τις αναμενόμενες τιμές των διαδικασιών. Στην πράξη, μπορούμε να παρατηρήσουμε το χρονικό μέσο όρο, σε αντίθεση με τη μέση τιμή που είναι μια θεωρητική οντότητα. Έτσι, για το επιτόκιο ανάπτυξης γ_i μιας μετοχής X_i, θα μελετάμε τη ποσότητα

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_i(t)dt$$

αντί για την $\mathbb{E}[\gamma_i(t)]$. Όμοια, για για ένα βάρος αγοράς μ_i θα μελετάμε την

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \log\mu_i(t)dt$$

αντί για την $\mathbb{E}[\log\mu_i(t)]$.

2.1 Το Χαρτοφυλάκιο της αγοράς

Συχνά μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε την απόδοση ενός χαρτοφυλακίου σε σχέση με ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο, το οποίο αποτελεί ένα μέτρο σύγκρισης. Ένα φυσικό μέτρο σύγκρισης είναι ένα χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει όλες τις μετοχές σε μια αγορά. Το χαρτοφυλάκιο αυτό ονομάζεται χαρτοφυλάκιο αγοράς.

Ορισμός 5 *Το χαρτοφυλάκιο μ με βάρη $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ που ορίζονται ως*

$$\mu_i(t)=\frac{X_i(t)}{\sum_{i=1}^n X_i(t)},\quad t\in[0,\infty) \tag{32}$$

για κάθε $i=1,\ldots,n$, λέγεται χαρτοφυλάκιο αγοράς, *ενώ τα βάρη μ_i λέγονται* βάρη αγοράς.

Από την αναπαράσταση των βαρών της αγοράς φαίνεται ότι $0<\mu_i<1$, για $t\in[0,\infty)$ και $i=1,\ldots,n$, δηλαδή τα βάρη αγοράς είναι θετικά για όλες τις μετοχές. Επιπλέον το χαρτοφυλάκιο μ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ορισμού 3, αφού είναι μια μετρήσιμη, προσαρμοσμένη, φραγμένη διαδικασία στο $(0,\infty)$ και επιπλέον $\sum_{i=1}^n \mu_i=1$. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πώς συμπεριφέρεται το χαρτοφυλάκιο της αγοράς, διότι είναι ένα κανονικό μέτρο σύγκρισης για όλα τα υπόλοιπα χαρτοφυλάκια.

Σε αντιστοιχία με τη σχέση (10), η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου αγοράς Z_μ ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{dZ_\mu(t)}{Z_\mu(t)} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \frac{dX_i(t)}{X_i(t)}.$$

Οπότε

$$\frac{dZ_\mu(t)}{Z_\mu(t)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i(t)}{\sum_{j=1}^{n} X_j(t)} \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} \right) = \frac{d\sum_{i=1}^{n} X_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} X_i(t)}.$$

Άρα

$$\frac{Z_\mu(t)}{Z_\mu(0)} = \frac{X_1(t) + \ldots + X_n(t)}{X_1(0) + \ldots + X_n(0)}, \quad t \in [0, \infty).$$

Έτσι η αξία του χαρτοφυλακίου αγοράς αναπαριστά τη συνδυασμένη κεφαλαιοποίηση όλων των μετοχών της αγοράς.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι αν $Z_\mu(0) = X_1(0) + \ldots + X_n(0)$, τα βάρη της αγοράς μ_i είναι οι διαδικασίες πηλίκων

$$\mu_i(t) = \frac{X_i(t)}{Z_\mu(t)}, \quad t \in [0, \infty)$$

για $i = 1, \ldots, n$.

Για ένα τυχαίο χαρτοφυλάκιο θα εισαγάγουμε τον ορισμό της σχετικής απόδοσης μιας μετοχής σε σύγκριση με ένα χαρτοφυλάκιο.

Ορισμός 6 *Για την τιμή μιας μετοχής X_i, $i = 1, \ldots, n$ και ένα χαρτοφυλάκιο η, η διαδικασία*

$$\log\left(\frac{X_i(t)}{Z_\eta(t)}\right), \quad t \in [0, \infty)$$

λέγεται διαδικασία σχετικής απόδοσης *(relative return process) της X_i σε σύγκριση με το χαρτοφυλάκιο η.*

Η διαδικασία σχετικής απόδοσης είναι ένα local martingale, ως διαφορά δύο local martingales, με διαδικασία *σχετικής συμμεταβλητότητας* (relative covariance process) τ^η τον πίνακα

$$\tau^\eta(t) = \left(\tau_{ij}^\eta(t)\right)_{1 \le i,j \le n}, \quad t \in [0, \infty)$$

με

$$\begin{aligned}
\tau^{\eta}_{ij}(t)dt &= d < \log \frac{X_i}{Z_\eta}, \log \frac{X_j}{Z_\eta} >_t && (33)\\
&= d < \log X_i - \log Z_\eta, \log X_j - \log Z_\eta >_t \\
&= d < \log X_i, \log X_j >_t - d < \log X_i, \log Z_\eta >_t \\
&- d < \log X_j, \log Z_\eta >_t + d < \log Z_\eta, \log Z_\eta >_t \\
&= \left(\sigma_{ij}(t) - \sigma_{i\eta}(t) - \sigma_{j\eta}(t) + \sigma_{\eta\eta}(t)\right) dt && (34)\\
&= (\eta(t) - e_i)^T \sigma(t)(\eta(t) - e_j)dt
\end{aligned}$$

για $t \in [0, \infty)$, $\sigma.\beta.$, όπου e_i, e_j κανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^n$ και $\sigma_{i\eta}$ είναι η συνδιασπορά του χαρτοφυλακίου η με το χαρτοφυλάκιο π που αποτελείται μόνο από τη μετοχή X_i για $i = 1, \ldots, n$. Δηλαδή

$$\sigma_{i\eta}(t)dt = d < \log X_i, \log Z_\eta >_t = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(t)\sigma_{ij}(t)dt.$$

Πιο απλά, από τον ορισμό φαίνεται ότι ο τ^η είναι συμμετρικός πίνακας. Ισοδύναμα λοιπόν ορίζουμε τον τ^η ως το συμμετρικό πίνακα για τον οποίο

$$x^T \tau^\eta(t) x = (\eta(t) - x)^T \sigma(t)(\eta(t) - x). \tag{35}$$

Η διαδικασία $< \log \frac{X_i}{Z_\eta} >_t$, για όλα τα i, είναι $\sigma.\beta.$ μη φθίνουσα και επιπλέον

$$\tau^\eta_{ii}(t)dt = d < \log \frac{X_i}{Z_\eta} >_t, \quad t \in [0, \infty),\ \sigma.\beta.$$

οπότε

$$\tau^\eta_{ii}(t) \geq 0, \quad t \in [0, \infty),\ \sigma.\beta.$$

Λήμμα 2 *Για ένα χαρτοφυλάκιο η, ο πίνακας $\tau^\eta(t)$ είναι θετικά ημιορισμένος με τάξη $n-1$, για $t \in [0, \infty)$, $\sigma.\beta.$, και ο μηδενόχωρος του $\tau^\eta(t)$ παράγεται από τον $\eta(t)$.*

Απόδειξη: Ο πίνακας $\sigma(t)$ είναι θετικά ορισμένος, άρα, από τη σχέση (35), ο πίνακα $\tau^\eta(t)$ είναι θετικά ημιορισμένος. Επιπλέον $\tau^\eta(t)x = 0$ αν και μονο αν $\eta(t) = x$. Έτσι $\eta(t)$ παράγει το μηδενόχωρο του $\tau^\eta(t)$ $\sigma.\beta.$ και η τάξη του $\tau^\eta(t)$ είναι $n-1$, για όλα τα $t \in [0, \infty)$, $\sigma.\beta.$

□

Ορίζουμε τη διαδικασία σχετικών διασπορών του χαρτοφυλακίου π σε σύγκριση με το χαρτοφυλάκιο η ως

$$\tau^\eta_{\pi\pi}(t) = \pi^T(t)\tau^\eta(t)\pi(t). \tag{36}$$

Τότε για κάθε $t \in [0, \infty)$, $\sigma.\beta.$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\tau^{\eta}_{\pi\pi}(t) &= \pi^T(t)\tau^{\eta}(t)\pi(t) \\
&= (\pi(t) - \eta(t))^T \sigma(t) (\pi(t) - \eta(t)) \\
&= \eta^T(t)\tau^{\pi}(t)\eta(t) \\
&= \tau^{\pi}_{\eta\eta}(t)
\end{aligned} \tag{37}$$

Από το λήμμα 2 έχουμε ότι η διαδικασία σχετικής διασποράς δύο χαρτοφυλακίων είναι μηδέν αν και μόνο αν τα δύο χαρτοφυλάκια είναι ίσα. Αυτό δεν θα συνέβαινε αν ο πίνακας σ δεν ήταν αντιστρέψιμος.

Όπως είδαμε το γ^*_π δεν εξαρτάται από το numeraire που χρησιμοποιούμε. Συνέπεια αυτού του αναλλοίωτου είναι ότι κατ΄ αντιστοιχία με τη σχέση (20) που εκφράζει το υπερβάλλον επιτόκιο ως προς τη μεταβλητότητα σ, έχουμε την ακόλουθη έκφραση του γ^*_π ως προς τη σχετική μεταβλητότητα ως προς ένα χαρτοφυλάκιο η.

Λήμμα 3 *Έστω π και η δύο χαρτοφυλάκια. Τότε $\sigma.\beta.$ για $t \in [0, \infty)$*

$$\gamma^*_\pi(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\tau^{\eta}_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\tau^{\eta}_{ij}(t)\right) \tag{38}$$

Απόδειξη: Από τις σχέσεις (34) και (36), έχουμε $\sigma.\beta.$ για $t \in [0, \infty)$,

$$\sigma_{ii}(t) = \tau^{\eta}_{ii}(t) + 2\sigma_{i\eta}(t) - \sigma_{\eta\eta}(t)$$

και

$$\sigma_{\pi\pi}(t) = \tau^{\eta}_{\pi\pi}(t) + 2\eta^T(t)\sigma(t)\pi(t) - \sigma_{\eta\eta}(t).$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση (20) έχουμε

$$\begin{aligned}
\gamma^*_\pi(t) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sigma_{\pi\pi}(t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\left(\tau^{\eta}_{ii}(t) + 2\sigma_{i\eta}(t) - \sigma_{\eta\eta}(t)\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(\tau^{\eta}_{\pi\pi}(t) + 2\eta^T(t)\sigma(t)\pi(t) - \sigma_{\eta\eta}(t)\right) \\
&\overset{(36)}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\tau^{\eta}_{ii}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\tau^{\eta}_{ij}(t)\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Το επόμενο λήμμα γράφει σε απλούστερη μορφή το υπερβάλλον επιτόκιο ανάπτυξης ενός χαρτοφυλακίου.

Λήμμα 4 *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο. Τότε σ.β. για $t \in [0, \infty)$*

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\tau_{ii}^\pi(t) \tag{39}$$

Απόδειξη: Αν στο λήμμα 3 αντικαταστήσω το χαρτοφυλάκιο π με το χαρτοφυλάκιο η θα έχω

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\tau_{ii}^\pi(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\tau_{ij}^\pi(t)\right)$$

Όμως από την σχέση (37) έχουμε

$$\pi(t)\tau^\pi(t)\pi^T(t) = (\pi(t) - \pi(t))\,\sigma(t)\,(\pi(t) - \pi(t))^T = 0$$

Άρα

$$\gamma_\pi^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\tau_{ii}^\pi(t)$$

$\square$

Αυτό το λήμμα μας επιτρέπει να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για την θετικότητα του υπερβάλλοντος επιτοκίου ανάπτυξης.

Πρόταση 3 *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο τέτοιο ώστε για όλα τα i και για κάθε $t \in [0, \infty)$, $\quad 0 \le \pi_i(t) < 1$. Τότε*

$$\gamma_\pi^*(t) > 0, \quad t \in [0, \infty),\ \sigma.\beta.$$

Απόδειξη: Έχουμε δει ότι $\gamma_\pi^*(t) \ge 0$. Έστω λοιπόν $\gamma_\pi^*(t) = 0$. Αν ικανοποιείται η συνθήκη $0 \le \pi_i(t) < 1$ για κάθε $t \in [0, \infty)$, τουλάχιστον δύο από τα βάρη $\pi_1, \ldots, \pi_n$ είναι θετικά (διότι $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$). Τότε από τη σχέση (39) θα πρέπει να υπάρχουν i, j με $i \ne j$ για τα οποία $\tau_{ii}^\pi = \tau_{jj}^\pi = 0$. Έτσι τα e_i, e_j ανήκουν και τα δυο στο μηδενόχωρο του τ^π, που είναι άτοπο διότι από το λήμμα 2 ο πίνακας τ^π έχει διάσταση 1.

$\square$

Η παραπάνω πρόταση μας δείχνει ότι για χαρτοφυλάκια χωρίς αρνητικές θέσεις, που δεν συγκεντρώνουν όλη τη κεφαλαιοποίηση τους σε μία μόνο μετοχή, το επιτόκιο ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου πάντα ξεπερνά το μέσο όρο με βάρη του επιτοκίου ανάπτυξης των αντίστοιχων μετοχών. Σε μια αγορά όπου όλα τα επιτόκια ανάπτυξης των μετοχών είναι ίσα, όλα τα χαρτοφυλάκια που δεν περιέχουν αρνητικές θέσεις σε μετοχές, έχουν υψηλότερο επιτόκιο ανάπτυξης από ότι το κοινό επιτόκιο ανάπτυξης των αντίστοιχων μετοχών.

Για το χαρτοφυλάκιο της αγοράς, η εξίσωση (38) γίνεται

$$\gamma_\mu^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)\tau_{ii}^\mu(t).$$

Το άθροισμα στο δεξί μέλος είναι ο μέσος όρος, σύμφωνα με τα βάρη της αγοράς, της μεταβλητότητας των μετοχών σε σχέση με την αγορά. Έτσι η παραπάνω σχέση δίνει μια ερμηνεία του υπερβάλλοντος επιτοκίου ανάπτυξης, ως ένα μέτρο εσωτερικής μεταβλητότητας της αγοράς (intrinsic volatility of the market).

Από τον ορισμό 6 η διαδικασία

$$\log \mu_i(t) = \log \frac{X_i(t)}{Z_\mu(t)}, \quad t \in [0, \infty) \tag{40}$$

αναπαριστά τη διαδικασία σχετικής απόδοσης της μετοχής X_i σε σύγκριση με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Οπότε σε αντιστοιχία με την σχέση (33) έχουμε

$$d < \log \mu_i, \log \mu_j >_t = d < \log \frac{X_i}{Z_\mu}, \log \frac{X_j}{Z_\mu} >_t = \tau_{ij}^\mu(t)dt. \tag{41}$$

Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα του Itô στην συνάρτηση $\mu_i(t) = \exp(\log \mu_i(t))$ προκύπτει

$$\begin{aligned} d\mu_i(t) &= \mu_i(t) d\log \mu_i(t) + \frac{1}{2}\mu_i(t) d < \log \mu_i >_t \\ &\overset{(41)}{=} \mu_i(t) d\log \mu_i(t) + \frac{1}{2}\mu_i(t)\tau_{ii}^\mu(t)dt. \end{aligned} \tag{42}$$

Άρα

$$\begin{aligned} d < \mu_i, \mu_j > &\overset{(42)}{=} < \mu_i d\log \mu_i + \frac{1}{2}\mu_i \tau_{ii}^\mu dt, \mu_j d\log \mu_j + \frac{1}{2}\mu_j \tau_{jj}^\mu dt > \\ &= < \mu_i d\log \mu_i, \mu_j d\log \mu_j > \\ &= \mu_i \mu_j d < \log \mu_i, \log \mu_j > \\ &\overset{(41)}{=} \mu_i \mu_j \tau_{ij}^\mu dt, \end{aligned} \tag{43}$$

για $t \in [0,\infty)$, $\sigma.\beta.$ Οι σχέσεις (41) και (43) είναι μοναδικές στα βάρη της αγοράς, και όμοια αποτελέσματα δεν ισχύουν για τυχαία βάρη χαρτοφυλακίων. Αν αντικαταστήσουμε το χαρτοφυλάκιο η με το χαρτοφυλάκιο μ της αγοράς, θα πάρουμε μια πιο χρήσιμη μορφή της παραπάνω εξίσωσης

$$\begin{aligned} d\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)d\log\left(\frac{X_i(t)}{Z_\mu(t)}\right)+\gamma_\pi^*(t)dt \\ &\overset{(40)}{=} \sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)d\log\mu_i(t)+\gamma_\pi^*(t)dt, \end{aligned} \tag{44}$$

$\sigma.\beta.$ για $t \in [0,\infty)$.

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη διαδικασία σχετικής απόδοσης του χαρτοφυλακίου π σε σύγκριση με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς σε όρους μεταβολών των αγοραίων βαρών και του υπερβάλλοντος επιτοκίου ανάπτυξης. Έτσι θα ήταν χρήσιμο να ξέρουμε πως συμπεριφέρονται οι δύο αυτές ποσότητες.

2.2 Επίδραση της Διαφοροποίησης στο Επιτόκιο Ανάπτυξης

Θα μελετήσουμε τη μακροχρόνια σχετική απόδοση των μετοχών σε μια αγορά. Με αυτό τον τρόπο θα μας επιτραπεί να χαρακτηρίσουμε τη μακροχρόνια συμπεριφορά συγκεκριμένων απλών χαρτοφυλακίων. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα να βρούμε χαρτοφυλάκια χωρίς αρνητικές θέσεις που επιτυγχάνουν καλύτερη απόδοση από το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Η πρακτική σημασία του να έχει κανείς μια στρατηγική που αποδίδει καλύτερα από την αγορά είναι προφανώς τεράστια.

Τα λήμματα που θα αποδείξουμε παρακάτω σχετίζουν το μέγεθος των βαρών ενός χαρτοφυλακίου με το υπερβάλλον επιτόκιο ανάπτυξής του.

Λήμμα 5 *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο σε μια μη εκφυλισμένη αγορά. Τότε υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για $i = 1,\ldots,n$,*

$$\tau_{ii}^\pi(t) \geq \epsilon\Big(1-\pi_i(t)\Big)^2, \quad t \in [0,\infty)\ \sigma.\beta. \tag{45}$$

Απόδειξη: Εφόσον η αγορά M είναι μη εκφυλισμένη, από τη σχέση (8), υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$x\sigma(t)x^T \geq \epsilon||x||^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,\infty),\ \sigma.\beta.$$

Για $i = 1, \ldots, n$ και $t \in [0, \infty)$, έστω $x(t) = \Big(\pi_1(t), \ldots, \pi_i(t) - 1, \ldots, \pi_n(t)\Big)$. Τότε

$$\begin{aligned} \tau_{ii}^{\pi}(t) &\overset{(34)}{=} \sigma_{ii}(t) - 2\sigma_{i\pi}(t) + \sigma_{\pi\pi}(t) \\ &= x\sigma(t)x^T \\ &\geq \epsilon ||x||^2. \end{aligned}$$

Αφού

$$||x||^2 \geq \Big(\pi_i(t) - 1\Big)^2, \quad t \in [0, \infty) \; \sigma.\beta.,$$

έπεται το ζητούμενο, δηλαδή

$$\tau_{ii}^{\pi}(t) \geq \epsilon\Big(1 - \pi_i(t)\Big)^2, \quad t \in [0, \infty) \; \sigma.\beta.$$

□

Για ένα χαρτοφυλάκιο π είναι βολικό να εισαγάγουμε το συμβολισμό

$$\pi_{max}(t) = \max_{1 \leq i \leq n} \pi_i(t), \quad t \in [0, \infty) \tag{46}$$

Με αυτό το συμβολισμό μπορούμε να ξαναγράψουμε το παραπάνω λήμμα σε μια πιο χρήσιμη μορφή.

Λήμμα 6 *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο σε μια μη εκφυλισμένη αγορά. Τότε υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για $i = 1, \ldots, n$,*

$$\tau_{ii}^{\pi}(t) \geq \epsilon\Big(1 - \pi_{max}(t)\Big)^2, \quad t \in [0, \infty) \; \sigma.\beta. \tag{47}$$

Απόδειξη: Έπεται από το προηγούμενο λήμμα.

□

Το επόμενο λήμμα ενισχύει την πρόταση 3 για μη εκφυλισμένες αγορές.

Λήμμα 7 *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο με μη αρνητικά βάρη σε μια μη εκφυλισμένη αγορά. Τότε υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για $t \in [0, \infty)$*

$$\gamma_{\pi}^{*}(t) \geq \frac{\epsilon}{2}\Big(1 - \pi_{max}(t)\Big). \tag{48}$$

Απόδειξη: Έστω $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Τότε, επειδή η αγορά είναι μη εκφυλισμένη,

$$\begin{aligned} \tau_{ii}^{\pi}(t) &= (\pi(t) - e_i)^T \sigma(t)(\pi(t) - e_i) \geq \epsilon ||\pi(t) - e_i||^2 \\ &= \epsilon\Big((1 - \pi_i(t))^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \pi_j^2(t)\Big). \end{aligned}$$

Έτσι αν τα βάρη του χαρτοφυλακίου είναι μη αρνητικά,

$$\begin{aligned} \gamma_{\pi}^{*}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \tau_{ii}^{\pi}(t) \\ &\geq \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \Big((1 - \pi_i(t))^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \pi_j^2(t)\Big) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)(1 - \pi_i(t))^2 + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \pi_j^2(t)\Big) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)(1 - \pi_i(t))^2 + \sum_{j=1}^{n} \pi_j^2(t)(1 - \pi_j(t))\Big) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)(1 - \pi_i(t)) \\ &\geq \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\Big(1 - \pi_{max}(t)\Big) \\ &= \frac{\epsilon}{2}\Big(1 - \pi_{max}(t)\Big). \end{aligned}$$

□

Με άλλα λόγια, σε μια αγορά μη εκφυλισμένη, αν $\pi_{max}(t)$ είναι φραγμένο μακριά από το 1, τότε $\gamma_{\pi}^{*}(t)$ είναι φραγμένο μακριά από το 0. Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι σε μια αγορά με φραγμένες διασπορές ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η $\gamma_{\pi}^{*}(t)$ είναι φραγμένη μακριά από το 0, τότε η $\pi_{max}(t)$ είναι φραγμένη μακριά από το 1.

Λήμμα 8 *Έστω π ένα χαρτοφυλάκιο σε μια αγορά με φραγμένες διασπορές τέτοια ώστε για $i = 1, \ldots, n$, $0 \leq \pi_i(t) < 1$, για όλα τα $t \in [0, \infty)$, σ.β. Τότε υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\pi_{max}(t) \leq 1 - \epsilon \gamma_{\pi}^{*}(t), \quad \sigma.\beta. \tag{49}$$

Απόδειξη: Έστω μια αγορά με φραγμένες διασπορές. Από τη σχέση (9) μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\Lambda > 0$ τέτοιο ώστε

$$x\sigma(t)x^T \leq \Lambda ||x||^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0, \infty),\ \sigma.\beta.$$

Για $i = 1, \ldots, n$, έστω $x = e_i$. Τότε

$$\sigma_{ii}(t) \leq \Lambda, \quad t \in [0, \infty),\ \sigma.\beta. \tag{50}$$

Για οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό k, με $1 \leq k \leq n$, $\pi_k < 1$, μπορούμε να ορίσουμε το χαρτοφυλάκιο η με βάρη

$$\eta_i(t) = \begin{cases} \frac{\pi_i(t)}{1-\pi_k(t)} & i \neq k \\ 0 & i = k, \end{cases}$$

για $t \in [0, \infty)$, $i = 1, \ldots, n$. Το χαρτοφυλάκιο η προκύπτει από το π αν μηδενίσουμε τη θέση μας στη μετοχή k.
Τότε $(\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$ ορίζει ένα χαρτοφυλάκιο με μη αρνητικά βάρη, και από τη σχέση (50) έπεται $\sigma.\beta.$, για $t \in [0, \infty)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i(t)\sigma_{ii}(t) - \sigma_{\eta\eta}(t) \leq \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t)\sigma_{ii}(t) \leq \Lambda \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t) = \Lambda. \tag{51}$$

Έστω

$$x = (\eta_1(t), \ldots, \eta_{k-1}(t), -1, \eta_{k+1}(t), \ldots, \eta_n(t)).$$

Τότε $||x(t)||^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \eta_i^2(t) + 1^2 \leq 2$, έτσι για $k = 1, \ldots, n$,

$$\sigma_{kk}(t) - 2\sigma_{k\eta}(t) + \sigma_{\eta\eta}(t) = x\sigma(t)x^T \leq \Lambda ||x||^2 \leq 2\Lambda, \tag{52}$$

για $t \in [0,\infty)$, $\sigma.\beta.$ Από τη σχέση (19), $\sigma.\beta.$ για $t \in [0,\infty)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
2\gamma_\pi^* &= \sum_{i=1}^n \pi_i\sigma_{ii} - \sum_{i,j=1}^n \pi_i\pi_j\sigma_{ij} \\
&= \pi_k\sigma_{kk} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \pi_i(t)\sigma_{ii} - \pi_k^2(t)\sigma_{kk} \\
&- 2\pi_k \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \pi_i\sigma_{ik} - \sum_{\substack{i,j=1\\ i,j\neq k}}^n \pi_i(t)\pi_j\sigma_{ij} \\
&= (\pi_k - \pi_k^2)\sigma_{kk} + (1-\pi_k)\sum_{i=1}^n \eta_i\sigma_{ii} \\
&- 2(\pi_k - \pi_k^2)\sum_{i=1}^n \eta_i\sigma_{ik} - (1-\pi_k)^2 \sum_{i,j=1}^n \eta_i\eta_j\sigma_{ij} \\
&= (\pi_k - \pi_k^2)\sigma_{kk} + (1-\pi_k)\sum_{i=1}^n \eta_i\sigma_{ii} \\
&- 2(\pi_k - \pi_k^2)\sigma_{k\eta} - (1-\pi_k)^2\sigma_{\eta\eta} \\
&= (\pi_k - \pi_k^2)(\sigma_{kk} - 2\sigma_{k\eta} + \sigma_{\eta\eta}) \\
&+ (1-\pi_k)(\sum_{i=1}^n \eta_i\sigma_{ii} - \sigma_{\eta\eta}) \\
&\overset{(51)(52)}{\leq} (\pi_k - \pi_k^2)2\Lambda + (1-\pi_k)\Lambda \\
&= \pi_k(1-\pi_k)2\Lambda + (1-\pi_k)\Lambda \\
&\leq (1-\pi_k)2\Lambda + (1-\pi_k)\Lambda \\
&= 3\Lambda(1-\pi_k)
\end{aligned}$$

Εφόσον η παραπάνω σχέση ισχύει για όλα τα k, $k = 1,\ldots,n$, η (49) ισχύει για $\epsilon = \frac{2}{3\Lambda}$.

□

Συνοψίζοντας, για ένα χαρτοφυλάκιο σε μια μη εκφυλισμένη αγορά με φραγμένες διασπορές ισχύει

$$\frac{\epsilon}{2}\Big(1-\pi_{max}(t)\Big) \leq \gamma_\pi^*(t) \leq \frac{1}{\epsilon}\Big(1-\pi_{max}(t)\Big)$$

Οπότε αν αντικαταστήσουμε το τυχαίο χαρτοφυλάκιο με το χαρτοφυλάκιο μ της αγοράς θα έχουμε

$$\frac{\epsilon}{2}\Big(1-\mu_{max}(t)\Big) \leq \gamma_\mu^*(t) \leq \frac{1}{\epsilon}\Big(1-\mu_{max}(t)\Big)$$

και αν ο χρονικός μέσος όρος του $\mu_{max}(t)$ πλησιάζει το 1, καθώς $t \to \infty$, ο χρονικός μέσος όρος του υπερβάλλοντος επιτοκίου ανάπτυξης $\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_\mu^*(t)dt$ θα πλησιάζει το 0 και αντίστροφα.

Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη μας για τη σχετική απόδοση των μετοχών σε μια αγορά, χρειάζεται να επιβάλλουμε μια συνθήκη ως προς τη δομή της αγοράς.

Ορισμός 7 *Η αγορά M είναι συνεπής (coherent) αν για $i = 1, \ldots, n$,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mu_i(t) = 0, \quad \sigma.\beta. \tag{53}$$

Εφόσον $\mu_i(t) < 1$ έχουμε ότι $\log \mu_i(t) < 0$. Άρα η σχέση (53) ισχύει όταν καμία από τις μετοχές δεν ελαττώνεται εκθετικά γρήγορα ως προς τη συνολική κεφαλαιοποίηση της αγοράς. Η σχέση (53) γράφεται ισοδύναμα

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left(\log X_i(t) - \log Z_\mu(t)\right) = 0, \quad \sigma.\beta. \tag{54}$$

διότι $\mu_i(t) = \frac{X_i(t)}{Z_\mu(t)}$.

Πρόταση 4 *Έστω M μια αγορά από μετοχές $X_1, \ldots, X_n$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η αγορά M είναι συνεπής

(ii) για $i = 1, \ldots, n, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (\gamma_i(t) - \gamma_\mu(t)) = 0, \quad \sigma.\beta.$

(iii)για $i, j = 1, \ldots, n, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (\gamma_i(t) - \gamma_j(t)) = 0, \quad \sigma.\beta.$

Απόδειξη: Θα ακολουθήσουμε τα εξής βήματα: (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i).

(i) ⇒ (ii)
Έστω ότι η αγορά M είναι συνεπής. Τότε ισχύει η σχέση (54) για $i = 1, \ldots, n$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\log X_i(T) - \log Z_\mu(T)\right) = 0, \quad \sigma.\beta.$$

Επιπλέον από τη πρόταση 2 και τη σχέση (31) έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\log Z_\mu(T) - \int_0^T \gamma_\mu(t)dt\right) = 0, \quad \sigma.\beta.$$

και

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\log X_i(T)-\int_0^T\gamma_i(t)dt\right)=0, \quad \sigma.\beta.$$

Συνθέτοντας τις τρείς παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στο ζητούμενο.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)
Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (ii) για $i, j = 1, \ldots, n$ και αφαιρώντας κατα μέλη τις δύο σχέσεις, καταλήγουμε στη συνθήκη (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i)
Η σχέση (31) και η συνθήκη (iii) δείχνουν ότι υπάρχει ένα υποσύνολο $\Omega' \subset \Omega$ με $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ τέτοιο ώστε για $\omega \in \Omega'$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\log X_i(T,\omega)-\int_0^T\gamma_i(t,\omega)dt\right)=0$$

για $i = 1, \ldots, n$, και

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\gamma_i(t,\omega)-\gamma_j(t,\omega)\right)=0$$

για $i, j = 1, \ldots, n$.
Έστω $\omega \in \Omega'$ και $j = 1$. Τώρα εάν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις δυο παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\log X_i(T,\omega)-\int_0^T\gamma_1(t,\omega)dt\right)=0 \tag{55}$$

για $i = 1, \ldots, n$. Έτσι

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\max_{1\le i\le n}\big(\log X_i(T,\omega)\big)-\int_0^T\gamma_1(t,\omega)dt\right)=0,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\log\big(\max_{1\le i\le n}X_i(T,\omega)\big)-\int_0^T\gamma_1(t,\omega)dt\right)=0. \tag{56}$$

Επιπλέον, για $T \in [0, \infty)$,

$$X_1(T,\omega)\le X_1(T,\omega)+\ldots+X_n(T,\omega)\le n\max_{1\le i\le n}X_i(T,\omega),$$

άρα για $T \in [0, \infty)$,

$$\log X_1(T, \omega) \leq \log Z_\mu(T, \omega) \leq \log n + \log \big(\max_{1 \leq i \leq n} X_i(T, \omega) \big) \tag{57}$$

Επειδή

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log n = 0,$$

από τις σχέσεις (55), (56) και (57) έπεται

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\log Z_\mu(T, \omega) - \int_0^T \gamma_1(t, \omega) dt \right) = 0$$

Τέλος από την παραπάνω σχέση και τη σχέση (55) έχουμε

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\log X_i(T, \omega) - \log Z_\mu(T, \omega) \right) = 0,$$

και αφού ισχύει για όλα τα $\omega \in \Omega'$, η αγορά M είναι συνεπής από τη (54).

□

Η παραπάνω πρόταση δείχνει ότι σε μια συνεπή αγορά, ο χρονικός μέσος όρος των διαφορών επιτοκίων ανάπτυξης δυο τυχαίων μετοχών είναι 0. Σημειώστε εδώ ότι ο χρονικός μέσος όρος του επιτοκίου ανάπτυξης μιας μόνο μετοχής μπορεί να μην υπάρχει. Παράδειγμα συνεπούς αγοράς αποτελεί η αγορά όπου όλες οι μετοχές έχουν το ίδιο επιτόκιο ανάπτυξης. Αν επιπλέον το επιτόκιο ανάπτυξης των μετοχών είναι σταθερό, είναι εύκολο να δειχθεί ότι ισχύει και το αντίστροφο αυτού.

Ένα χαρτοφυλάκιο π θα λέμε ότι έχει σταθερά βάρη, αν τα βάρη π_i, είναι θετικά και δε μεταβάλλονται με το χρόνο.
Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι σε μια μη εκφυλισμένη και συνεπή αγορά, τα χαρτοφυλάκια με σταθερά βάρη, που περιέχουν περισσότερες από μια μετοχές, ασυμπτωτικά θα υπερέχουν του χαρτοφυλακίου της αγοράς, $\sigma.\beta.$

Πρόταση 5 *Υποθέτουμε ότι η αγορά M είναι μη εκφυλισμένη και συνεπής, και έστω π ένα χαρτοφυλάκιο με σταθερά βάρη όπου τουλάχιστον δυο από αυτά να είναι θετικά, ενώ τα υπόλοιπα μη αρνητικά. Τότε*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log \left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)} \right) > 0, \quad \sigma.\beta.$$

Απόδειξη: Έστω ένα χαρτοφυλάκιο με σταθερά βάρη. Τότε

$$\pi_i(t) = p_i, \quad t \in [0, \infty)$$

για $i = 1, \ldots, n$, όπου p_i είναι μη αρνητικές σταθερές που αθροίζονται στο ένα με $1 > p_{max} = \max_{1 \le i \le n} p_i$. Επειδή η αγορά είναι μη εκφυλισμένη, από το λήμμα 7, υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\gamma_\pi^*(t) \ge \frac{\epsilon}{2}\Big(1 - p_{max}\Big), \quad t \in [0, \infty), \ \sigma.\beta.$$

Έτσι,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_\pi^*(t)dt \ge \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\epsilon}{2}(1 - p_{max})dt = \frac{\epsilon}{2}(1 - p_{max}), \quad T \in [0, \infty), \ \sigma.\beta. \tag{58}$$

Από τη σχέση (44),

$$d\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right) = \sum_{i=1}^n p_i d\log\mu_i(t) + \gamma_\pi^*(t)dt,$$

$\sigma.\beta.$, για $t \in [0, \infty)$. Οπότε, $\sigma.\beta.$,

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\log\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)}\right) - \int_0^T \gamma_\pi^*(t)dt\right) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^n p_i \log\mu_i(T)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\mu_i(T) = 0 \end{aligned}$$

Όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από τον ορισμό 7, αφού η αγορά είναι συνεπής. Άρα, $\sigma.\beta.$,

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)}\right) \ge \liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_\pi^*(t)dt \ge \frac{\epsilon}{2}(1 - p_{max}) > 0$$

□

3 Διαφοροποίηση αγοράς και Συναρτησιογεννή Χαρτοφυλάκια

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη διαφοροποίηση της κατανομή του κεφαλαίου σε μια χρηματαγορά. Μια αγορά θα λέμε ότι είναι ¨διαφοροποιημένη¨ αν το κεφάλαιο είναι μοιρασμένο σε ένα αρκετά μεγάλο αριθμό μετοχών. Θα δείξουμε ότι το υπερβάλλον επιτόκιο ανάπτυξης της αγοράς σχετίζεται με τη διαφοροποίηση της κατανομής του κεφαλαίου, και θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σχέση για να μελετήσουμε τη μακροχρόνια συμπεριφορά μιας διαφοροποιημένης αγοράς κάτω από την υπόθεση ότι όλες οι μετοχές έχουν το ίδιο επιτόκιο ανάπτυξης. Παρότι διαισθητικά θα περίμενε κανείς ότι μια πραγματική αγορά είναι διαφοροποιημένη (αντιμονοπωλιακοί νόμοι), θα δούμε ότι στο μοντέλο αγοράς του ορισμού 2 όλη η κεφαλαιοποίηση της αγοράς συγκεντρώνεται σε μια μετοχή.
Επιπλέον, θα εισαγάγουμε την εντροπία της αγοράς σαν ένα μέτρο της διαφοροποίησής της και θα μελετήσουμε το χαρτοφυλάκιο με εντροπικά βάρη και τα συναρτησιακά παραγόμενα χαρτοφυλάκια. Τα συναρτησιακά παραγόμενα χαρτοφυλάκια είναι μια γενίκευση των εντροπικών χαρτοφυλακίων. Θα δείξουμε ότι ένα πλήθος συναρτήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη παραγωγή χαρτοφυλακίων.
Τέλος θα δείξουμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε χαρτοφυλάκια που περιέχουν μόνο θετικές θέσεις και αποδίδουν καλύτερα από το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

3.1 Διαφοροποίηση Αγοράς

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε το τυπικό ορισμό της διαφοροποιημένης αγοράς, και θα δείξουμε ότι η διαφοροποίηση αυτή εκφράζεται σε όρους του υπερβάλλοντος επιτοκίου ανάπτυξης της αγοράς. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σχέση για να καθορίσουμε συνθήκες της αγοράς που είναι σύμφωνες με τη διαφοροποίηση της αγοράς.

Ορισμός 8 *Η αγορά M θα λέμε ότι είναι* διαφοροποιημένη *(diverse) αν υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\mu_{max}(t) \leq 1 - \delta, \quad \forall t \in [0, \infty), \ \sigma.\beta., \tag{59}$$

και θα λέμε ότι είναι ασθενώς διαφοροποιημένη *(weakly diverse) στο $[0, T]$ αν υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mu_{max}(t)dt \leq 1 - \delta, \quad \sigma.\beta.$$

Πρόταση 6 *Αν η αγορά M είναι μη εκφυλισμένη και διαφοροποιημένη, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\gamma_\mu^*(t) \geq \delta, \quad t \in [0, \infty), \ \sigma.\beta. \tag{60}$$

Αντίστροφα, αν η αγορά M έχει φραγμένη διασπορά και υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει η (60), η αγορά M είναι διαφοροποιημένη.

Απόδειξη: Έστω M μη εκφυλισμένη και διαφοροποιημένη. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ με

$$\mu_{max}(t) \leq 1 - \delta, \quad t \in [0, \infty), \ \sigma.\beta.$$

και από το λήμμα 7 μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\gamma_\mu^*(t) \geq \frac{\epsilon}{2}\Big(1 - \mu_{max}(t)\Big), \quad t \in [0, \infty), \ \sigma.\beta.$$

Έτσι

$$\gamma_\mu^*(t) \geq \frac{\epsilon}{2}\delta, \quad t \in [0, \infty), \ \sigma.\beta.$$

Επιλέγοντας $\delta' = \frac{\epsilon}{2}\delta$ έπεται η σχέση (60).

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η αγορά M έχει φραγμένη διασπορά, από το λήμμα 8, υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για $t \in [0, \infty)$, $\sigma.\beta.$

$$\begin{aligned} \mu_{max}(t) &\leq 1 - \epsilon\gamma_\mu^*(t) \\ &\overset{(60)}{\leq} 1 - \epsilon\delta, \end{aligned}$$

και έτσι επιλέγοντας $\delta' = \epsilon\delta$ έχουμε ότι η αγορά είναι διαφοροποιημένη.

□

Από την πρόταση 2 φαίνεται ότι η μακροχρόνια συμπεριφορά των χαρτοφυλακίων και των μετοχών καθορίζεται από τα αντίστοιχα επιτόκια ανάπτυξης. Αν λοιπόν όλες οι μετοχές σε μια αγορά έχουν το ίδιο επιτόκιο ανάπτυξης $\gamma(t)$, από τη σχέση (21), το επιτόκιο ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου της αγοράς θα είναι

$$\gamma_\mu(t) = \gamma(t) + \gamma_\mu^*(t), \quad t \in [0, \infty), \ \sigma.\beta.$$

Επιπλέον, από τις ισοδυναμίες (ii) και (iii) της πρότασης 4, η αγορά μας είναι συνεπής και ασυμπτωτικά το επιτόκιο ανάπτυξης της αγοράς θα είναι το ίδιο με το κοινό επιτόκιο ανάπτυξης των μετοχών. Έτσι, μακροχρόνια, η συνεισφορά του όρου $\gamma_\mu^*(t)$ στη παραπάνω σχέση θα είναι αμελητέα. Η παρακάτω πρόταση οδηγεί σε αυτό το συμπέρασμα.

Πρόταση 7 *Υποθέτουμε ότι όλες οι μετοχές στην αγορά M έχουν το ίδιο επιτόκιο ανάπτυξης. Τότε*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_\mu^*(t)dt = 0, \quad \sigma.\beta. \tag{61}$$

Απόδειξη: Αφού τα επιτόκια ανάπτυξης όλων των μετοχών είναι ίσα, από την πρόταση 4, η αγορά είναι συνεπής και ισχύει

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (\gamma(t)-\gamma_\mu(t))dt = 0, \quad \sigma.\beta.$$

Επιπλέον

$$\gamma_\mu(t) = \gamma(t) + \gamma_\mu^*(t), \quad t\in[0,\infty),\ \sigma.\beta.$$

Άρα έπεται το ζητούμενο.

□

Σε μια αγορά μη εκφυλισμένη, με όλες τις μετοχές να έχουν το ίδιο επιτόκιο ανάπτυξης $\gamma(t)$, από τη παραπάνω πρόταση και το λήμμα 7 έχουμε

$$0 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_\mu^*(t)dt \geq \frac{\epsilon}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Big(1-\mu_{max}(t)\Big)dt.$$

Άρα

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Big(1-\mu_{max}(t)\Big)dt = 0.$$

Έτσι, μακροχρόνια, κάποια στιγμή μια μετοχή θα κυριαρχήσει ολόκληρης της αγοράς (συγκεντρώνοντας όλη τη κεφαλαιοποίηση), έπειτα θα υποχωρήσει, και αργά ή γρήγορα κάποια άλλη μετοχή θα πάρει τη θέση της σαν απόλυτη κυρίαρχη της αγοράς κ.ο.κ.

Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2 *Υποθέτουμε ότι η αγορά είναι μη εκφυλισμένη. Αν όλες οι μετοχές στην αγορά M έχουν το ίδιο επιτόκιο ανάπτυξης, τότε η αγορά δεν είναι διαφοροποιημένη.*

Αν υποθέσουμε ότι η αγορά M είναι μη εκφυλισμένη και όλες οι μετοχές στην αγορά έχουν σταθερά επιτόκια ανάπτυξης, η αγορά M δεν θα είναι διαφοροποιημένη, διότι από τη σχέση (31) έχουμε

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log X_i(T) = \gamma_i, \quad \sigma.\beta. \tag{62}$$

Άρα όλες οι μετοχές, εκτός από εκείνες με τα υψηλότερα επιτόκια ανάπτυξης, αναπαριστούν ένα ασήμαντο κομμάτι της αξίας της αγοράς μακροπρόθεσμα. Τότε, εφαρμόζουμε τη πρόταση 7 για την (υπο)αγορά που απαρτίζεται από τις μετοχές με το υψηλότερο επιτόκιο ανάπτυξης, και καταλήγουμε στην υπόθεση του προηγούμενου πορίσματος. Επομένως η αγορά δεν είναι διαφοροποιημένη.

Η παραπάνω παρατήρηση δείχνει ότι μια χρηματαγορά με σταθερά επιτόκια ανάπτυξης και συνδιασπορές είναι ασταθής υπό την έννοια ότι έχει την τάση να συγκεντρώνει το κεφάλαιό της σε μια μόνο μετοχή.

3.2 Εντροπία και Διαφοροποίηση της αγοράς

Η έννοια της εντροπίας είναι μία από τις σημαντικότερες έννοιες στις φυσικές επιστήμες. Ο όρος εντροπία χρησιμοποιήθηκε αρχικά στη θερμοδυναμική και έπειτα στη θεωρία της πληροφορίας ως ένας ¨δείκτης αβεβαιότητας¨ που διακατέχει ένα σύστημα. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την εντροπία σαν ένα δείκτη διαφοροποίησης της αγοράς. Σε αυτή την ενότητα δεν θα θεωρήσουμε ασυμπτωτικά γεγονότα αλλά θα περιοριστούμε στο χρονικό ορίζοντα $[0, T]$.

Ας θυμίσουμε ότι η συνάρτηση εντροπίας S ορίζεται ως

$$S(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \tag{63}$$

για όλα τα x στο σύνολο

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ 0 < x_i < 1,\ i = 1, \dots, n\} \tag{64}$$

Ορισμός 9 *Έστω μ το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Τότε η* εντροπία της αγοράς *$S(\mu)$ ορίζεται ως*

$$S(\mu(t)) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \log \mu_i(t), \quad t \in [0, T].$$

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία $S(\mu)$ είναι ένα συνεχές semimartingale. Επιπλέον $0 < S(\mu(t)) \leq \log n$ για κάθε $t \in [0, T]$, *σ.β.*, διότι

$$\mu_i < 1 \Rightarrow \log \mu_i < 0 \Rightarrow S(\mu(t)) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \log \mu_i(t) > 0$$

και επειδή η συνάρτηση $f(x) = -x \log x$ είναι κοίλη, από την ανισότητα Jensen, ισχύει

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \right) \geq -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \log \mu_i(t),$$

άρα
$$\log n \geq S(\mu(t)).$$
Παρατηρούμε ότι για $\mu = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ έχουμε $S(\mu) = \log n$, δηλαδή η εντροπία μεγιστοποιείται όταν το χαρτοφυλάκιό μας είναι ισοβαρές, κάτι που θα περιμέναμε άλλωστε να συμβαίνει.

Ο ορισμός 8 εξασφαλίζει ένα κριτήριο που καθορίζει πότε μια αγορά είναι διαφοροποιημένη. Η εντροπία ορίζει ενα δείκτη του βαθμού διαφοροποίησης της αγοράς. Ας δούμε πως σχετίζονται αυτά τα δύο.

Πρόταση 8 *Η αγορά M είναι διαφοροποιημένη αν και μόνο αν υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε*
$$S(\mu(t)) \geq \epsilon, \quad t \in [0, T], \ \sigma.\beta. \tag{65}$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση εντροπίας είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $\bar{\Delta}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, \ 0 \leq x_i \leq 1, \ i = 1, \ldots, n\}$. Άρα λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Επιπλέον S μη αρνητική στο $\bar{\Delta}^n$, και $S(x) = 0$ μόνο όταν $x_i = 0$ ή $x_i = 1$ για κάθε i. Αν λοιπόν διαγραφεί μια γειτονιά των σημείων που μηδενίζουν την S, το ελάχιστο της θα είναι θετικό και τότε η συνάρτηση εντροπίας είναι φραγμένη μακριά από το 0 για το υπόλοιπο του $\bar{\Delta}^n$.

□

Μπορούμε να ορίσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που σχετίζεται με την εντροπία της αγοράς $S(\mu)$.

Ορισμός 10 *Έστω μ το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Το χαρτοφυλάκιο π με βάρη που ορίζονται ως*
$$\pi_i(t) = -\frac{\mu_i(t) \log \mu_i(t)}{S(\mu(t))}, \quad t \in [0, T], \tag{66}$$
για $i = 1, \ldots, n$, λέγεται χαρτοφυλάκιο με εντροπικά βάρη *(entropy-weighted portfolio).*

Το χαρτοφυλάκιο π ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ορισμού 3.
Από την ανισότητα Jensen για τη κοίλη συνάρτηση $\log x$ έχουμε
$$\sum_{i=1}^n x_i \log x_i \leq \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big) \log\Big(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i}\Big) \leq \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big) \log\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big).$$
Άρα
$$S(\mu) = \mu_i \log\frac{1}{\mu_i} - \sum_{k \neq i}^n \mu_k \log \mu_k \geq \mu_i \log\frac{1}{\mu_i} + (1 - \mu_i) \log\frac{1}{1 - \mu_i}.$$

Αν λοιπόν

$$\log\frac{1}{\mu_i} \leq \mu_i \log\frac{1}{\mu_i} + (1-\mu_i)\log\frac{1}{1-\mu_i},$$

δηλαδή $\mu_i > \frac{1}{2}$, για την αναλογία $\frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}$ θα ισχύει

$$\frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)} = -\frac{\log\mu_i(t)}{S(\mu(t))} < 1.$$

Επιπλέον, καθώς το $\mu_i \to 1$,

$$\frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)} = \frac{\log\frac{1}{\mu_i}}{S(\mu(t))} \to 0.$$

Έτσι το χαρτοφυλάκιο π είναι λιγότερο συγκεντρωμένο από το χαρτοφυλάκιο μ, σε εκείνες τις μετοχές με τα υψηλότερα βάρη αγοράς.

Θεώρημα 1 *Έστω μ το χαρτοφυλάκιο αγοράς και π το εντροπικό χαρτοφυλάκιο, και έστω Z_μ και Z_π οι αντίστοιχες αξίες των χαρτοφυλακίων. Τότε σ.β. για $t \in [0,T]$,*

$$d\log S(\mu(t)) = d\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right) - \frac{\gamma_\mu^*}{S(\mu(t))}dt \tag{67}$$

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô για την συνάρτηση $\log S(\mu(t))$ έχουμε

$$\begin{aligned} d\log S(\mu) &= \sum_{i=1}^n D_i \log S(\mu) d\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n D_{ij}\log S(\mu) d<\mu_i,\mu_j> \\ &\overset{(43)}{=} \sum_{i=1}^n D_i \log S(\mu) d\mu_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n D_{ij}\log S(\mu)\mu_i\mu_j\tau_{ij}^\mu dt \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} D_{ij}\log S(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}\log S(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{D_i S(x)}{S(x)}\right) \\ &= \frac{S(x)D_{ij}S(x) - D_iS(x)D_jS(x)}{S^2(x)} \\ &= \frac{D_{ij}S(x)}{S(x)} - \frac{D_iS(x)D_jS(x)}{S^2(x)} \\ &= \frac{D_{ij}S(x)}{S(x)} - D_i\log S(x) D_j \log S(x) \end{aligned} \tag{68}$$

με $D_i S(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} S(x) = -1 - \log x_i$ για $i = 1, \ldots, n$. Από τα τα παραπάνω και από το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^n d\mu_i(t) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
d \log S(\mu) &= \sum_{i=1}^n \frac{D_i S(\mu)}{S(\mu)} d\mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{D_{ij} S(\mu)}{S(\mu)} - \frac{D_i S(\mu) D_j S(\mu)}{S^2(\mu)} \right) \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{\log(\mu_i)}{S(\mu)} d\mu_i - \frac{1}{S(\mu)} \sum_{i=1}^n d\mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{D_{ii} S(\mu)}{S(\mu)} \mu_i^2 \tau_{ii}^{\mu} dt \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{(-1 - \log \mu_i)(-1 - \log \mu_j)}{S^2(\mu)} \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt \\
&= -\sum_{i=1}^n \frac{\log(\mu_i)}{S(\mu)} d\mu_i - \frac{1}{2S(\mu)} \sum_{i=1}^n \mu_i \tau_{ii}^{\mu} dt \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{(1 + \log \mu_i)(1 + \log \mu_j)}{S^2(\mu)} \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt \qquad (69)
\end{aligned}$$

Τώρα $\sigma.\beta.$, για $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n (1 + \log \mu_i)(1 + \log \mu_j) \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt &= \sum_{i,j=1}^n (\mu_i \log \mu_i)(\mu_j \log \mu_j) \tau_{ij}^{\mu} dt \\
&+ 2 \sum_{i,j=1}^n \log(\mu_i) \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt \\
&+ \sum_{i=1}^n \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt \\
&= \sum_{i,j=1}^n (\mu_i \log \mu_i)(\mu_j \log \mu_j) \tau_{ij}^{\mu} dt,
\end{aligned}$$

εφόσον $\mu(t)$ ανήκει στο μηδενόχωρο του $\tau^{\mu}(t)$ από το λήμμα 2. Οπότε η σχέση (69) είναι ισοδύναμη με

$$\begin{aligned}
d \log S(\mu) &= -\sum_{i=1}^n \frac{\log(\mu_i)}{S(\mu)} d\mu_i - \frac{1}{2S(\mu)} \sum_{i=1}^n \mu_i \tau_{ii}^{\mu} dt \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\log \mu_i \log \mu_j}{S^2(\mu)} \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt, \qquad (70)
\end{aligned}$$

$\sigma.\beta.$, για $t \in [0,T]$. Από τη σχέση (44),

$$
\begin{aligned}
d\log\left(\frac{Z_\pi}{Z_\mu}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \pi_i d\log\mu_i + \gamma_\pi^* dt \\
&\overset{(42),(38)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{\mu_i} d\mu_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i \tau_{ii}^{\mu} dt \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \pi_i \tau_{ii}^{\mu} dt - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \pi_j \tau_{ij}^{\mu} dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{\mu_i} d\mu_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \pi_j \tau_{ij}^{\mu} dt \qquad (71) \\
&\overset{(66)}{=} -\sum_{i=1}^{n} \frac{\log(\mu_i)}{S(\mu)} d\mu_i \\
&- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\log\mu_i \log\mu_j}{S^2(\mu)} \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt
\end{aligned}
$$

Οπότε από το παραπάνω και τη σχέση (70) έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
d\log S(\mu) &= d\log\left(\frac{Z_\pi}{Z_\mu}\right) - \frac{1}{2S(\mu)}\sum_{i=1}^{n} \mu_i \tau_{ii}^{\mu} dt \\
&\overset{(39)}{=} d\log\left(\frac{Z_\pi}{Z_\mu}\right) - \frac{\gamma_\mu^*}{S(\mu)} dt.
\end{aligned}
$$

□

Η σχέση (67) δεν περιέχει στοχαστικό ολοκλήρωμα, και έτσι όπως θα δούμε θα μπορέσουμε εύκολα να συγκρίνουμε τις Z_π, Z_μ.
Το θεώρημα 1 και η σχέση (11) δείχνουν ότι η semimartingale αναπαράσταση του λογαρίθμου της εντροπίας της αγοράς ικανοποιεί

$$
\begin{aligned}
d\log S(\mu(t)) &= \left(\gamma_\pi(t) - \gamma_\mu(t) - \frac{\gamma_\mu^*}{S(\mu(t))}\right) dt \\
&+ \sum_{i,\nu=1}^{n} (\pi_i(t) - \mu_i(t))\xi_{i\nu}(t) dW_\nu(t), \qquad (72)
\end{aligned}
$$

για $t \in [0,\infty)$, $\sigma.\beta.$

Ορισμός 11 *Θα λέμε ότι μια αγορά είναι ¨ευσταθής¨ (stable) μακροχρόνια αν*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log S(\mu(T)) = 0, \quad \sigma.\beta.$$

Από την $S(\mu(t)) \leq \log n$, βλέπει κανείς ότι ο μόνος τρόπος για να μην είναι το όριο μηδέν είναι $S(\mu(T)) \to 0$ καθώς $T \to \infty$. Επομένως μια αγορά είναι ευσταθής αν δεν κυριαρχείται από μια μετοχή εκθετικά γρήγορα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι μια διαφοροποιημένη αγορά είναι και ευσταθής μακροχρόνια, αφού από τη πρόταση 8 η εντροπία της είναι φραγμένη από το μηδέν.
Από τη σχέση (72) βλέπουμε, $\sigma.\beta.$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log S(\mu(T)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\gamma_\pi(t) - \gamma_\mu(t) - \frac{\gamma_\mu^*}{S(\mu(t))} \right) dt,$$

διότι από το λήμμα 1,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i,\nu=1}^{n} (\pi_i(t) - \mu_i(t))\xi_{i\nu}(t) dW_\nu(t) = 0.$$

Για το λόγο αυτό,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\gamma_\pi(t) - \gamma_\mu(t) - \frac{\gamma_\mu^*}{S(\mu(t))} \right) dt = 0, \quad \sigma.\beta.$$

Οπότε για να έχουμε μακροχρόνια ευστάθεια, είναι απαραίτητο ο χρονικός μέσος όρος της $\gamma_\pi(t)$ να είναι μεγαλύτερος από αυτόν της $\gamma_\mu(t)$. Άρα μακροχρόνια το χαρτοφυλάκιο με εντροπικά βάρη θα αποδίδει τουλάχιστον όσο το χαρτοφυλάκιο αγοράς. Στην περίπτωση μιας διαφοροποιημένης αγοράς, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ενισχυθεί.

Πόρισμα 3 *Έστω μ το χαρτοφυλάκιο αγοράς και π το εντροπικό χαρτοφυλάκιο, και υποθέτουμε ότι η αγορά M είναι μη εκφυλισμένη και διαφοροποιημένη. Τότε για ένα μεγάλο αριθμό T ισχύει*

$$\frac{Z_\pi(T)}{Z_\pi(0)} > \frac{Z_\mu(T)}{Z_\mu(0)}, \quad \sigma.\beta. \tag{73}$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα 1, $\sigma.\beta.$,

$$\log\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\pi(0)}\right) = \log\left(\frac{Z_\mu(T)}{Z_\mu(0)}\right) + \log\left(\frac{S(\mu(T))}{S(\mu(0))}\right) + \int_0^T \frac{\gamma_\mu^*}{S(\mu(t))} dt$$

Τώρα, η αγορά M είναι διαφοροποιημένη, άρα από τη πρόταση 8, υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $S(\mu(t)) \geq \epsilon$, για όλα τα $t \in [0, T]$, $\sigma.\beta.$ Επίσης, $S_\mu(0) \geq 0$, και από τη πρόταση 6, για μια μη εκφυλισμένη και διαφοροποιημένη αγορά, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\gamma_\mu^*(t) \geq \delta$, για όλα τα $t \in [0, T]$, $\sigma.\beta.$ Έτσι $\sigma.\beta.$,

$$log\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\pi(0)}\right) > \log\left(\frac{Z_\mu(T)}{Z_\mu(0)}\right) + \log\epsilon - \log\log n + \frac{\delta T}{\log n}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{Z_\pi(T)}{Z_\pi(0)} > \frac{Z_\mu(T)}{Z_\mu(0)} \exp\left(\log\epsilon - \log\log n + \frac{\delta T}{\log n}\right).$$

Επιλέγοντας $T = \delta^{-1}\log n(\log\log n - \log\epsilon)$ προκύπτει

$$\frac{Z_\pi(T)}{Z_\pi(0)} > \frac{Z_\mu(T)}{Z_\mu(0)}, \quad \sigma.\beta.$$

$\square$

3.3 Συναρτησιογεννή Χαρτοφυλάκια

Σε αυτή την ενότητα θα εισαγάγουμε την έννοια των συναρτησιογεννών χαρτοφυλακίων. Η βασική ιδέα είναι ότι συγκεκριμένες πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο Δ^n μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη παραγωγή χαρτοφυλακίων, και η συμπεριφορά αυτών των συναρτήσεων επηρεάζει τη συμπεριφορά των χαρτοφυλακίων που έχουν παράγει.

Ορισμός 12 *Έστω S μια θετική, συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο Δ^n, και έστω π ένα χαρτοφυλάκιο. Θα λέμε ότι η S* παράγει *το π (S generates π) αν υπάρχει μια μετρήσιμη διαδικασία φραγμένης κύμανσης Θ τέτοια ώστε*

$$\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right) = \log\left(\frac{S(\mu(t))}{S(\mu(0))}\right) + \Theta(t), \quad t \in [0,T],\ \sigma.\beta. \tag{74}$$

Η διαδικασία Θ ονομάζεται drift διαδικασία.

Αν η S παράγει το χαρτοφυλάκιο π λέγεται γεννήτρια (generating) συνάρτηση του π, και το π λέγεται συναρτησιογεννές. Η βασική ιδιότητα ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου είναι ότι η διαδικασία σχετικής απόδοσης του συνδέεται, μέσω της (74), με τη συμπεριφορά της συνάρτησης που το παράγει.
Οι $\log\left(\frac{Z_\pi}{Z_\mu}\right)$ και $\log S(\mu)$ στην (74) είναι συνεχείς και προσαρμοσμένες διαδικασίες, συνεπώς η διαδικασία Θ είναι συνεχής και προσαρμοσμένη. Εφόσον Θ φραγμένης κύμανσης, η διαδικασία $\log S(\mu)$ είναι ένα συνεχές semimartingale και η σχέση (74) μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή,

$$d\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right) = d\log S(\mu(t)) + d\Theta(t), \quad t \in [0,T],\ \sigma.\beta. \tag{75}$$

Η παραπάνω εξίσωση εξασφαλίζει μια αναπαράσταση της σχετικής απόδοσης του π. Με κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης S, ο όρος Θ είναι αυτός που θα καθορίσει την μακροπρόθεσμη σχετική απόδοση του χαρτοφυλακίου π, όπως και στο παράδειγμα της εντροπίας.

Η συνάρτηση εντροπίας

$$S(\mu(t)) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \log \mu_i(t)$$

που εισαγάγαμε στην προηγούμενη ενότητα είναι μια γεννήτρια συνάρτηση και από το θεώρημα 1, παράγει το χαρτοφυλάκιο π με βάρη

$$\pi_i(t) = -\frac{\mu_i(t) \log \mu_i(t)}{S(\mu(t))},$$

και διαδικασία drift

$$\Theta(t) = \frac{\gamma_\mu^*(t)}{S(\mu(t))}.$$

Η πρόταση που ακολουθεί δείχνει ότι το επιτόκιο ανάπτυξης του συναρτησιογενούς χαρτοφυλακίου π και του χαρτοφυλακίου της αγοράς μ σχετίζονται με τη διαδικασία Θ.

Πρόταση 9 *Υποθέτουμε ότι η διαδικασία S παράγει το π με διαδικασία drift Θ, και έστω*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log S(\mu(T)) = 0, \quad \sigma.\beta. \tag{76}$$

Τότε

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T \gamma_\pi(t)dt - \int_0^T \gamma_\mu(t)dt - \Theta(T) \right) = 0, \quad \sigma.\beta. \tag{77}$$

Απόδειξη: Έστω ότι η S παράγει το χαρτοφυλάκιο π, τότε από τη σχέση (74), $\sigma.\beta.$, για $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\log S(\mu(T)) + \Theta(T) &= \log Z_\pi(T) - \log Z_\mu(T) + \log S(\mu(0)) \\
&\overset{(11)}{=} \int_0^T (\gamma_\pi(t) - \gamma_\mu(t))\, dt + \log S(\mu(0)) \\
&+ \int_0^T \sum_{i,\nu=1}^{n} (\pi_i(t) - \mu_i(t)) \xi_{i\nu}(t) dW_\nu(t)
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} (\log S(\mu(T)) + \Theta(T)) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\gamma_\pi(t) - \gamma_\mu(t))\, dt \\
&+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log S(\mu(0)) \\
&+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i,\nu=1}^{n} (\pi_i(t) - \mu_i(t)) \xi_{i\nu}(t) dW_\nu(t)
\end{aligned}$$

Οπότε από τη σχέση (76) και το λήμμα 1 έπεται η σχέση (77).

□

Η συνθήκη (76) της πρότασης αυτής ικανοποιείται για παράδειγμα όταν $\log S$ είναι φραγμένο στο Δ^n, και είναι η συνθήκη που συναντούμε στις περισσότερες εφαρμογές.

Πολλές συναρτήσεις ορισμένες στο Δ^n παράγουν χαρτοφυλάκια. Ωστόσο, η διάσταση του Δ^n είναι $n-1$, ενώ τα βάρη της αγοράς n, έτσι δεν υπάρχει φυσικό σύστημα συντεταγμένων στο Δ^n που να μεταχειρίζεται με τον ίδιο τρόπο τα βάρη της αγοράς. Για να αναλύσουμε λοιπόν τις γεννήτριες συναρτήσεις, είναι βολικό να χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^n$, παρόλο που δεν είναι ένα σύστημα συντεταγμένων στο Δ^n. Ειδικώτερα, θεωρούμε τις συναρτήσεις που είναι ορισμένες σε μια ανοιχτή περιοχή $U \subset \mathbb{R}^n$ του Δ^n. Από εδώ και πέρα θα θεωρούμε ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις S είναι κλάσεως C^2, δηλαδή είναι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις και στις n μεταβλητές.

Θεώρημα 2 *Έστω S μια θετική, C^2 συνάρτηση ορισμένη σε μια γειτονιά U του Δ^n για την οποία $x_i D_i \log S(x)$ είναι φραγμένο για όλα τα i, όπου $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Τότε η S παράγει το χαρτοφυλάκιο π με βάρη*

$$\pi_i(t) = \left(D_i \log S(\mu(t)) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) D_j \log S(\mu(t)) \right) \mu_i(t), \qquad (78)$$

για $t \in [0,T]$ και $i = 1, \dots, n$, και διαδικασία drift

$$d\Theta(t) = -\frac{1}{2S(\mu(t))} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} S(\mu(t)) \mu_i(t) \mu_j(t) \tau_{ij}^{\mu}(t) dt, \quad t \in [0,T],\ \sigma.\beta. \qquad (79)$$

Παρατηρούμε ότι οι ποσότητες $\pi_1, \dots, \pi_n$, εξαρτώνται μόνο από τα βάρη της αγοράς $\mu_1, \dots, \mu_n$ και όχι από τη δομή των συσχετίσεων $\xi_{i\nu}$ της αγοράς. Η δομή των συσχετίσεων εμφανίζεται μόνο στον υπολογισμό του $\Theta(t)$. Όμως θα πρέπει να τονιστεί ότι για να υπολογίσει κανείς το $\Theta(t)$ σε μια περίοδο $[0,T]$ χρησιμοποιώντας πεπερασμένα δεδομένα, δε χρειάζεται να ξέρει ή να υπολογίσει τη δομή των συσχετίσεων, αφού η σχέση (74) το πετυχαίνει υπό τη μορφή $\Theta(t) = \log\left(\frac{Z_\pi(t)/S(\mu(0))}{Z_\mu(t)/S(\mu(t))}\right)$, που περιέχει μόνο τις παρατηρούμενες ποσότητες.

Απόδειξη: Έστω ϕ η συνάρτηση

$$\phi(t) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) D_j \log S(\mu(t)), \quad t \in [0,T], \tag{80}$$

και για $i = 1, \ldots, n$,

$$\pi_i(t) = \left(D_i \log S(\mu(t)) + \phi(t)\right) \mu_i(t), \quad t \in [0,T].$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \pi_i &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(\mu)\mu_i + \phi \sum_{i=1}^{n} \mu_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(\mu)\mu_i + \phi \\
&\overset{(80)}{=} 1.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω και οι συνθήκες της συνάρτησης S εξασφαλίζουν ότι π είναι χαρτοφυλάκιο. Επίσης από τη σχέση (79) είναι ξεκάθαρο ότι Θ είναι φραγμένης κύμανσης συνάρτηση.
Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô για την συνάρτηση $\log S(\mu)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
d \log S(\mu) &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(\mu) d\mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} \log S(\mu) d < \mu_i, \mu_j > \\
&\overset{(43)}{=} \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(\mu) d\mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} \log S(\mu) \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt
\end{aligned}$$

με

$$D_{ij} \log S(x) = \frac{D_{ij} S(x)}{S(x)} - D_i \log S(x) D_j \log S(x)$$

από τη σχέση (68). Άρα, $\sigma.\beta.$, για $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
d \log S(\mu) &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(\mu) d\mu_i \\
&+ \frac{1}{2S(\mu)} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} S(\mu) \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_i \log S(\mu) D_j \log S(\mu) \mu_i \mu_j \tau_{ij}^{\mu} dt.
\end{aligned}$$

Για να ισχύει η (75), θα πρέπει

$$\begin{aligned} d\log\left(\frac{Z_\pi}{Z_\mu}\right) &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(\mu) d\mu_i \\ &- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_i \log S(\mu) D_j \log S(\mu)\mu_i\mu_j\tau_{ij}^{\mu} dt. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (71),

$$d\log\left(\frac{Z_\pi}{Z_\mu}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{\mu_i} d\mu_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i\pi_j\tau_{ij}^{\mu} dt$$

Με ϕ και π όπως ορίστηκαν στις (80) και (78), αντίστοιχα, έχουμε, *σ.β.*, για $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i}{\mu_i} d\mu_i &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(\mu)\mu_i d\mu_i + \phi\sum_{i=1}^{n} d\mu_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(\mu)\mu_i d\mu_i \end{aligned}$$

αφού $\sum_{i=1}^{n} d\mu_i = 0$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i\pi_j\tau_{ij}^{\mu} &= \sum_{i,j=1}^{n} (\mu_i D_i \log S(\mu) + \mu_i\phi)(\mu_j D_j \log S(\mu) + \mu_j\phi)\tau_{ij}^{\mu} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} D_i \log S(\mu) D_j \log S(\mu)\mu_i\mu_j\tau_{ij}^{\mu} \\ &+ 2\phi\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i\mu_j\tau_{ij}^{\mu} D_i \log S(\mu) \\ &+ \phi^2\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i\mu_j\tau_{ij}^{\mu} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} D_i \log S(\mu) D_j \log S(\mu)\mu_i\mu_j\tau_{ij}^{\mu}, \end{aligned}$$

διότι το μ είναι στο μηδενόχωρο του τ^{μ}, από το λήμμα 2.
Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη (71), έπεται το ζητούμενο.

$\square$

Σε αυτό το σημείο θα παραθέσουμε μερικά παραδείγματα απλών γεννήτριων συναρτήσεων και των χαρτοφυλακίων που αυτές παράγουν.

Παράδειγμα 1. Η $S(x) = 1$ παράγει το χαρτοφυλάκιο αγοράς μ με διαδικασία drift $\Theta(t) = 0$, διότι ικανοποιείται η σχέση (74).

Παράδειγμα 2. Η $S(x) = (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ παράγει το χαρτοφυλάκιο με όλα τα βάρη του ίσα. Σε αυτή τη περίπτωση $d\Theta(t) = \gamma_\pi^*(t)dt$. Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο είναι και το Value Line Index.
Πράγματι, η S παράγει το ισοβαρές χαρτοφυλάκιο, διότι από τη σχέση (44) έχουμε

$$\begin{aligned} d\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right) &= \sum_{i=1}^n \pi_i(t) d\log\mu_i(t) + \gamma_\pi^*(t)dt \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d\log\mu_i(t) + \gamma_\pi^*(t)dt \\ &= d\log(\mu_1\cdots\mu_n)^{\frac{1}{n}} + \gamma_\pi^*(t)dt \\ &= d\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Έστω η συνάρτηση $S(x) = x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}$, όπου $p_1, \ldots, p_n$ σταθερές με $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Επειδή $x_i D_i \log S(x) = x_i \frac{p_i}{x_i} = p_i$ είναι φραγμένο, ισχύει το θεώρημα 2. Άρα η S παράγει το χαρτοφυλάκιο με βάρη

$$\pi_i(t) = \left(D_i \log S(\mu(t)) + 1 - \sum_{j=1}^n \mu_j(t) D_j \log S(\mu(t))\right)\mu_i(t),$$

και διαδικασία drift που ικανοποιεί

$$d\Theta(t) = -\frac{1}{2S(\mu(t))}\sum_{i,j=1}^n D_{ij}S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^\mu(t)dt,$$

όπου $D_iS(x) = \frac{p_i}{x_i}S(x), \quad D_{ii}S(x) = \frac{p_i^2}{x_i^2}S(x) - \frac{p_i}{x_i^2}S(x), \quad D_{ij}S(x) = \frac{p_ip_j}{x_ix_j}S(x)$

και $D_i \log S(x) = \frac{p_i}{x_i}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\pi_i(t) &= \left(\frac{p_i}{\mu_i(t)} + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) \frac{p_j}{\mu_j(t)} \right) \mu_i(t) \\
&= \left(\frac{p_i}{\mu_i(t)} + 1 - \sum_{j=1}^{n} p_j \right) \mu_i(t) \\
&= \left(\frac{p_i}{\mu_i(t)} + 1 - 1 \right) \mu_i(t) \\
&= p_i
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
d\Theta(t) &= -\frac{1}{2S(\mu(t))} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{p_i p_j}{\mu_i(t)\mu_j(t)} S(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)dt \\
&+ \frac{1}{2S(\mu(t))} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\mu_i^2(t)} S(\mu(t))\mu_i(t)^2 \tau_{ii}^{\mu}(t)dt \\
&= \frac{1}{2} \left(-\sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j \tau_{ij}^{\mu}(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \tau_{ii}^{\mu}(t) \right) dt \\
&\overset{(38)}{=} \gamma_{\pi}^{*}(t)dt.
\end{aligned}$$

Δηλαδή η S παράγει το χαρτοφυλάκιο με σταθερά βάρη $\pi_i(t) = p_i$ για όλα τα i και $d\Theta(t) = \gamma_{\pi}^{*}(t)dt$.

Παράδειγμα 4. Αν $S(x) = x_1^2$, τότε $D_1 S(x) = 2x_1, \quad D_{11}S(x) = 2, \quad D_1 \log S(x) = \frac{2}{x_1}$, ενώ οι υπόλοιπες παράγωγοι είναι 0. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2, η S παράγει το χαρτοφυλάκιο με βάρη

$$\begin{aligned}
\pi_1(t) &= \left(D_1 \log S(\mu(t)) + 1 - \mu_1(t) D_1 \log S(\mu(t))\right) \mu_1(t) \\
&= \left(\frac{2}{\mu_1(t)} + 1 - \mu_1(t) \frac{2}{\mu_1(t)} \right) \mu_1(t) \\
&= \left(\frac{2}{\mu_1(t)} - 1 \right) \mu_1(t) \\
&= 2 - \mu_1(t),
\end{aligned}$$

και για $i = 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\pi_i(t) &= \left(D_i \log S(\mu(t)) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) D_j \log S(\mu(t)) \right) \mu_i(t) \\
&= \left(0 + 1 - \mu_1(t) \frac{2}{\mu_1(t)} \right) \mu_i(t) \\
&= -\mu_i(t).
\end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}
d\Theta(t) &= -\frac{1}{2S(\mu(t))} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} S(\mu(t)) \mu_i(t) \mu_j(t) \tau_{ij}^{\mu}(t) dt \\
&= -\frac{1}{2\mu_1^2(t)} 2\mu_1^2(t) \tau_{11}^{\mu}(t) dt \\
&= -\tau_{11}^{\mu}(t) dt
\end{aligned}$$

Το παραπάνω αντιστοιχεί σε ένα συνεχώς αντισταθμισμένο χαρτοφυλάκιο στο οποίο για κάθε €2 που επενδύονται στη μετοχή X_1, -€1 επενδύεται στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Παρατηρούμε επίσης ότι η διαδικασία drift είναι φθίνουσα. Οπότε παρόλο που φαίνεται λογική η επένδυση σε μια μόνο μετοχή δε θα ήταν σοφό να μοχλεύσει κανείς αυτή την επένδυση παίρνοντας αρνητική θέση στην αγορά, τουλάχιστον μακροχρόνια.

Δεν είναι όλα τα χαρτοφυλάκια συναρτησιογεννή. Ας χαρακτηρίσουμε όμως εκείνα που είναι. θυμίζουμε ότι *ένα διαφορικό είναι ακριβές* εάν γράφεται στη μορφή $\sum_{i=1}^{n} D_i G(x) dx$, για κάποια παραγωγίσιμη συνάρτηση G.

Πρόταση 10 *Υποθέτουμε ότι οι $f_1, \dots, f_n$ συνεχώς παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σε μια γειτονιά του Δ^n για τις οποίες $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$ για όλα τα $x \in \Delta^n$. Τότε το χαρτοφυλάκιο π με βάρη $\pi_i(t) = f_i(\mu(t))$ είναι συναρτησιογεννές αν και μόνο αν υπάρχει μια συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση F ορισμένη σε μια γειτονιά του Δ^n τέτοια ώστε το*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(x)}{x_i} + F(x) \right) dx_i \tag{81}$$

να είναι ένα ακριβές διαφορικό.

Απόδειξη: Έστω ότι το χαρτοφυλάκιο π με βάρη $\pi_i(t) = f_i(\mu(t))$ είναι συναρτησιογεννές. Τότε θα υπάρχει μια συνάρτηση S ορισμένη σε μια γειτονιά U του Δ^n τέτοια ώστε

$$f_i(x) = \left(D_i \log S(x) + 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j(t) D_j \log S(x) \right) x_i,$$

για $i = 1, \ldots, n$, και έστω

$$F(x) = -1 + \sum_{j=1}^{n} x_j(t) D_j \log S(x).$$

Επιπλέον, για $x \in U$, το διαφορικό

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(x)}{x_i} + F(x) \right) dx_i = \sum_{i=1}^{n} D_i \log S(x) dx_i = d \log S(x)$$

είναι ακριβές.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $F, f_1, \ldots, f_n$ ώστε να ισχύει το (81) να είναι ακριβές. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση G ώστε για $x \in \Delta^n$

$$D_i G(x) = \frac{f_i(x)}{x_i} + F(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Θα δείξω ότι η συνάρτηση $S(x) = e^G$ παράγει το χαρτοφυλάκιο π με βάρη $\pi_i(t) = f_i(\mu(t))$, για $i = 1, \ldots, n$. Τότε θα έχει αποδειχθεί η πρόταση.
Τα βάρη του χαρτοφυλακίου που παράγει η S δίνονται από τη σχέση (78),

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \left(D_i \log S(\mu) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) D_j \log S(\mu) \right) \mu_i \\
&= \left(\frac{f_i(\mu)}{\mu_i} + F(\mu) + 1 - \sum_{j=1}^{n} \mu_j (\frac{f_j(\mu)}{\mu_j} + F(\mu) \right) \mu_i \\
&= \left(\frac{f_i(\mu)}{\mu_i} + F(\mu) + 1 - \sum_{j=1}^{n} f_j(\mu) - F(\mu) \sum_{j=1}^{n} \mu_j \right) \mu_i \\
&= f_i(\mu),
\end{aligned}$$

όπου για τον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε ότι
$D_i \log S(\mu(t)) = \frac{f_i(\mu(t))}{\mu_i(t)} + F(\mu(t))$ και $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$.

□

Το θεώρημα 2 δείχνει ότι μια θετική, C^2 συνάρτηση S ορισμένη σε μια γειτονιά U του Δ^n παράγει ένα χαρτοφυλάκιο. Φαίνεται λοιπόν λογικό ότι οι τιμές της S στο Δ^n θα καθορίζουν μοναδικά το χαρτοφυλάκιο, ενώ οι τιμές της στο συμπλήρωμα δεν θα συνεισφέρουν καθόλου. Ο επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε ότι κάτι τέτοιο ισχύει. Το λήμμα που ακολουθεί θα μας φανεί χρήσιμο για την μετέπειτα ανάλυσή μας.

Λήμμα 9 *Έστω f συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε μια γειτονιά U του Δ^n. Τότε η f είναι σταθερή στο Δ^n αν και μόνο αν για κάθε $x \in \Delta^n$, $D_i f(x) = D_j f(x)$ για όλα τα i και j.*

Απόδειξη: Παραμετρικοποιούμε το Δ^n με τους θετικούς αριθμούς $t_1, \ldots, t_{n-1}$, όπου $t_1 + \ldots + t_{n-1} < 1$, ώστε $x_i = t_i$ για $i = 1, \ldots, n-1$ και $x_n = 1 - t_1 - \ldots - t_{n-1}$.Τότε για $i = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial t_i} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_i} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i} \\ &= D_i f(x) - D_n f(x),\end{aligned}$$

για όλα τα $x \in \Delta^n$.
Αν λοιπόν f είναι σταθερή στο Δ^n, τότε όλες οι μερικές παραγώγοι ως προς τις παραμέτρους t_i είναι μηδέν, και άρα $D_i f(x) = D_n f(x)$ για όλα τα i.
Ενώ αν υποθέσουμε ότι $D_i f(x) = D_j f(x)$ για όλα τα i και j, όλες οι μερικές παράγωγοι ως προς τις παραμέτρους t_i είναι μηδέν, έτσι f είναι σταθερή στο Δ^n.

□

Θα περιοριστούμε στις γεννήτριες συναρτήσεις που παράγουν το ίδιο χαρτοφυλάκιο για όλες τις τιμές των βαρών της αγοράς, για $t \in [0, T]$. Γνωρίζοντας ότι η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου της αγοράς μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο Δ^n, η (78) του θεωρήματος 2 δείχνει ότι δύο C^2 συναρτήσεις, S_1 και S_2, παράγουν το ίδιο χαρτοφυλάκιο αν και μόνο αν

$$D_i \log S_1(x) + 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j D_j \log S_1(x) = D_i \log S_2(x) + 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j D_j \log S_2(x), \tag{82}$$

για $i = 1, \ldots, n$ και για κάθε $x \in \Delta^n$.

Πρόταση 11 *Έστω S_1 και S_2 θετικές, C^2 συναρτήσεις ορισμένες σε μια ανοιχτή περιοχή του Δ^n. Τότε η (82) ισχύει για $i = 1, \ldots, n$ και για όλα τα $x \in \Delta^n$ αν και μόνο αν ο λόγος $\frac{S_1}{S_2}$ είναι σταθερός στο Δ^n.*

Απόδειξη: Έστω ότι ισχύει η (82) για $i = 1, \ldots, n$ και για όλα τα $x \in \Delta^n$. Τότε

$$D_i \log \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = D_j \log \frac{S_1(x)}{S_2(x)},$$

για όλα τα i και j και για όλα τα $x \in \Delta^n$. Συνεπώς, από το λήμμα 9 η συνάρτηση $\log \frac{S_1}{S_2}$ είναι σταθερή στο Δ^n, άρα $\frac{S_1}{S_2}$ είναι σταθερό στο Δ^n.

Υποθέτουμε ότι S_1 και S_2 δύο θετικές, C^2 συναρτήσεις ορισμένες σε μια ανοιχτή περιοχή του Δ^n, και έστω ο λόγος $\frac{S_1}{S_2}$ είναι σταθερός στο Δ^n. Τότε και η συνάρτηση

$$f(x) = \log \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$$

είναι σταθερή στο Δ^n. Έτσι, από το λήμμα 9, έπεται

$$D_i \log \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = D_j \log \frac{S_1(x)}{S_2(x)},$$

ή ισοδύναμα

$$D_i \log S_1(x) - D_i \log S_2(x) = D_j \log S_1(x) - D_j \log S_2(x)$$

για όλα τα i και j. Κατά συνέπεια, η διαφορά $D_i \log S_1(x) - D_i \log S_2(x)$ είναι σταθερή για όλα τα i, οπότε από τη σχέση (78) του θεωρήματος 2 τα βάρη που παράγονται από τις συναρτήσεις S_1, S_2 είναι τα ίδια.

□

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει εκείνες τις συναρτήσεις που παράγουν χαρτοφυλάκια με αύξουσες διαδικασίες drift. Ένα συναρτησιογεννές χαρτοφυλάκιο με μια αύξουσα διαδικασία drift θα έχει καλύτερη απόδοση από το χαρτοφυλάκιο της αγοράς, σε περιόδους που η $S(\mu(t))$ αυξάνεται ή τουλάχιστον παραμένει σταθερή. Έτσι έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον τέτοιου είδους χαρτοφυλάκια. Ένα χαρτοφυλάκιο με τις παραπάνω ιδιότητες είναι το χαρτοφυλάκιο με εντροπικά βάρη.

Πρόταση 12 *Έστω S μια γεννήτρια συνάρτηση ώστε ο πίνακας $H(S(x)) = \Big(D_{ij}S(x)\Big)$ να έχει το πολύ μια θετική ιδιοτιμή για όλα τα $x \in \Delta^n$, και αν υπάρχει θετική ιδιοτιμή, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα να είναι παράλληλο στο $e = (1, \ldots, 1)$. Έστω π το χαρτοφυλάκιο που παράγεται από την S. Τότε $\pi_i(t) \geq 0$ για $i = 1, \ldots, n$ και η διαδικασία Θ είναι μη φθίνουσα. Αν επιπλέον, για όλα τα $x \in \Delta^n$, $rank(D_{ij}S(x)) > 1$, η διαδικασία Θ είναι γνησίως αύξουσα σ.β.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι S είναι γεννήτρια συνάρτηση και ο πίνακας $H(S(x))$ έχει το πολύ μια θετική ιδιοτιμή για όλα τα $x \in \Delta^n$, η οποία, αν υπάρχει, αντιστοιχεί σε ένα ιδιοδιάνυσμα ορθογώνιο στο Δ^n. Για όλα τα $\bar{x} \in \Delta^n$, ορίζουμε $x(u) \in \Delta^n$ ως

$$x(u) = uv_k + (1-u)\bar{x},$$

για $0 \leq u < 1$, όπου $v_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ το διάνυσμα με 1 στη k συνιστώσα και 0 αλλού. Έστω $f(u) = S(x(u))$, τότε

$$\begin{aligned} \dot{f}(u) &= \nabla S(x(u))\dot{x}(u) \\ &= \nabla S(x(u))(v_k - \bar{x}) \\ &= D_k S(x(u)) - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i D_i S(x(u)) \end{aligned} \tag{83}$$

και

$$\begin{aligned}\ddot{f} &= \frac{d}{du}\Big(\nabla S(x(u))\dot{x}(u)\Big)\\ &= \dot{x}^T(u)H(S(x(u)))\dot{x}(u) + \nabla S(x(u))\ddot{x}(u)\\ &= \dot{x}^T(u)H(S(x(u)))\dot{x}(u)\\ &= (v_k - \bar{x})D_{ij}S(x(u))(v_k - \bar{x})^T \leq 0,\end{aligned}$$

αφού $(v_k - \bar{x})$ είναι κάθετο στο e, και άρα αναλύεται σε ιδιοδιανύσματα του $H(S(x(u)))$ που περιέχουν μη θετικές ιδιοτιμές. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $[0,1)$, έτσι

$$f(u) \leq f(0) + u\dot{f}(0), \quad 0 \leq u < 1.$$

Όμως $f(u) = S(x(u)) \geq 0$, άρα

$$0 \leq f(0) + u\dot{f}(0), \quad 0 \leq u < 1.$$

Επιπλέον

$$0 \leq \lim_{u\to 1}(f(0) + u\dot{f}(0)) = S(\bar{x}) + D_kS(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_iD_iS(\bar{x}).$$

Τώρα από τα παραπάνω και τη σχέση (83) προκύπτει

$$\begin{aligned}0 &\leq f(0) + uf'(0)\\ &\overset{(83)}{=} S(x(0)) + \Big(D_kS(x(0)) - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_iD_iS(x(0))\Big)u\\ &= S(\bar{x}) + \Big(D_kS(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_iD_iS(\bar{x})\Big)u\\ &< S(\bar{x}) + D_kS(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_iD_iS(\bar{x}),\end{aligned}$$

για όλα τα $\bar{x} \in \Delta^n$. Συνεπώς από τη (78) του θεωρήματος 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\pi_k(t) &= \left(D_k \log S(\mu(t)) + 1 - \sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)D_j\log S(\mu(t))\right)\mu_k(t)\\ &= \left(\frac{D_kS(\mu(t))}{S(\mu(t))} + 1 - \sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)\frac{D_jS(\mu(t))}{S(\mu(t))}\right)\mu_k(t)\\ &= \frac{\mu_k(t)}{S(\mu(t))}\left(D_kS(\mu(t)) + S(\mu(t)) - \sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)D_jS(\mu(t))\right) \geq 0,\end{aligned}$$

$k = 1, \dots, n$, για $t \in [0, T]$, $\sigma.\beta.$
Ας υποθέσουμε ότι $t \in [0, T]$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ιδιοτιμές του πίνακα $\Big(D_{ij} S(x(u))\Big)$, και έστω $c_k = (c_{k1}, \dots, c_{kn})^T$ ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_k, για $k = 1, \dots, n$. Τότε για $i, j = 1, \dots, n$

$$D_{ij} S(x(u)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_{ki} c_{kj},$$

διότι τα c_k είναι κάθετα μεταξύ τους αφού ο $D_{ij} S(x(u))$ είναι συμμετρικός πίνακας. Συνεπώς, από τη σχέση (79) του θεωρήματος 2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Theta(t) &= -\frac{1}{2S(\mu(t))} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} S(\mu(t)) \mu_i(t) \mu_j(t) \tau_{ij}^{\mu}(t) \\ &= -\frac{1}{2S(\mu(t))} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t) \mu_j(t) c_{ki} c_{kj} \tau_{ij}^{\mu}(t) \end{aligned}$$

Αν λοιπόν μια από τις ιδιοτιμές λ_i είναι θετική, χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω λ_1 θετική, τότε το ιδιοδυάνισμα που παράγει η λ_1 θα είναι παράλληλο στο e, δηλαδή $c_1 = (n^{-\frac{1}{2}}, \dots, n^{-\frac{1}{2}})$. Από το λήμμα 2 ο πίνακας $\Big(\tau_{ij}^{\mu}(t)\Big)$ είναι θετικά ορισμένος με μηδενόχωρο που παράγεται από τον $\mu(t)$. Άρα

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t) \mu_j(t) c_{1i} c_{1j} \tau_{ij}^{\mu}(t) = 0$$

και

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t) \mu_j(t) c_{ki} c_{kj} \tau_{ij}^{\mu}(t) > 0$$

για $k = 2, \dots, n$. Από τα παραπάνω και την υπόθεση ότι καμιά από τις ιδιοτιμές $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ δεν είναι θετική έχουμε ότι $\frac{d}{dt}\Theta(t) > 0$, και άρα Θ μή φθίνουσα $\sigma.\beta.$
Αν επιπλέον $rank(D_{ij} S(x)) > 1$ για όλα τα $x \in \Delta^n$, τουλάχιστον μια από τις ιδιοτιμές $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι αρνητική, οπότε Θ γνησίως αύξουσα $\sigma.\beta.$

□

3.4 Κυριαρχώντας του Χαρτοφυλακίου της Αγοράς

Είδαμε ότι η συνάρτηση εντροπίας χρησιμοποιείται ως ένας δείκτης διαφοροποίησης της αγοράς. Η διαφοροποίηση της αγοράς αποτελεί ένα παρατηρήσιμο χαρακτηριστικό χρηματαγορών. Έτσι μας είναι χρήσιμο να θεωρούμε

πιο γενικά μέτρα διαφοροποίησης της αγοράς από τη συνάρτηση εντροπίας. Επιπλέον τα μέτρα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη κατασκευή χαρτοφυλακίων με επιθυμητά επενδυτικά χαρακτηριστικά. Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε την θεωρία των μέτρων αυτών.
Τέλος, θα δείξουμε ότι μια αγορά M μη εκφυλισμένη και ασθενώς διαφοροποιημένη στο διάστημα $[0, T]$ δίνει τη δυνατότητα σύνθεσης χαρτοφυλακίων με μόνο θετικές θέσεις που αποδίδουν οπωσδήποτε καλύτερα από την αγορά συνολικά.

Θυμίζουμε ότι μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι συμμετρική (*symmetric*) αν είναι αναλλοίωτη ως προς αντιμεταθέσεις των μεταβλητών x_i, $i = 1, \ldots, n$, και είναι *αυστηρά κοίλη* (strictly concave) αν για $0 < p < 1$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(px + (1-p)y) > pf(x) + (1-p)f(y).$$

Ορισμός 13 *Μια θετική C^2 συνάρτηση, ορισμένη σε μια ανοιχτή γειτονιά του Δ^n είναι ένας δείκτης διαφοροποίησης της αγοράς αν είναι συμμετρική και κοίλη. Ένα χαρτοφυλάκιο που παράγεται από ένας τέτοιος δείκτης ονομάζεται diversity-weighted χαρτοφυλάκιο, και τα βάρη του λέγονται diversity weights.*

Με τη συμμετρία του παραπάνω ορισμού εξασφαλίζεται ότι όλες οι μετοχές συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο, ενώ η κοιλότητα της συνάρτησης συνεπάγεται ότι η μεταφορά κεφαλαίου από μια μεγαλύτερη μετοχή σε μια μικρότερη αυξάνει την αξία του δείκτη. Τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας δείχνουν ότι τα μέτρα διαφοροποίησης της αγοράς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη παραγωγή χαρτοφυλακίων.

Πρόταση 13 *Υποθέτουμε ότι η S είναι ένας δείκτης διαφοροποίησης που παράγει ένα χαρτοφυλάκιο π με διαδικασία drift Θ. Τότε η Θ είναι μη φθίνουσα σ.β., και εαν $\mu_i(t)) \geq \mu_j(t)$ έχουμε*

$$\frac{\pi_j(t)}{\mu_j(t)} \geq \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)},$$

για όλα τα $t \in [0, T]$, σ.β.

Απόδειξη: Αν S είναι ένας δείκτης διαφοροποίησης, εξ ορισμού η S είναι μια συνάρτηση συμμετρική και κοίλη. Έτσι ο πίνακας $(D_{ij}S(x))$ είναι αρνητικά ημιορισμένος. Όμως ένας αρνητικά ημιορισμένος πίνακας δεν έχει θετικές ιδιοτιμές, και άρα από τη πρόταση 12 έχουμε ότι η Θ είναι μη φθίνουσα σ.β.
Υποθέτουμε ότι $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta^n$ με $x_i \leq x_j$ για κάποιο $i < j$. Ορίζουμε

$$x(u) = \Big(x_1, \ldots, x_{i-1}, (1-u)x_i + ux_j, x_{i+1}, \ldots \\ \ldots, x_{j-1}, (1-u)x_j + ux_i, x_{j+1}, \ldots, x_n\Big).$$

Έτσι $x(0) = x = (x_1, \dots, x_n)$ και $x(1)$ είναι το διάνυσμα x με μετάθεση μεταξύ των συντεταγμένων i, j. Ορίζουμε $f(u) = S(x(u))$, τότε η f είναι C^2 και κοίλη, και επειδή S είναι συμμετρική συνάρτηση θα ισχύει $f(0) = f(1)$. Τώρα,

$$
\begin{aligned}
\dot{f}(u) &= \nabla S(x(u))\dot{x}(u) \\
&= D_i S(x(u))(x_j - x_i) + D_j S(x(u))(x_i - x_j) \\
&= (x_j - x_i)(D_i S(x(u)) - D_j S(x(u))).
\end{aligned}
$$

Αφού $x_i \le x_j$, έπεται ότι $D_i S(x) \ge D_j S(x)$. Άρα από τη (78) του θεωρήματος 2 έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi_j(t)}{\mu_j(t)} &= D_j \log S(\mu(t)) + 1 - \sum_{k=1}^{n} \mu_k(t) D_k \log S(\mu(t)) \\
&\ge D_i \log S(\mu(t)) + 1 - \sum_{k=1}^{n} \mu_k(t) D_k \log S(\mu(t)) \\
&= \frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}.
\end{aligned}
$$

□

Η παραπάνω πρόταση δείχνει ότι η αναλογία $\frac{\pi_i(t)}{\mu_i(t)}$ φθίνει καθώς τα βάρη της αγοράς αυξάνουν. Έτσι αν η τιμή μιας μετοχής ανεβαίνει σε σχέση με την αγορά, τότε στο χαρτοφυλάκιο π η θέση σε εκείνη τη μετοχή συγκριτικά με τη συνολική αγορά μειώνεται.

Είδαμε ότι η συνάρτηση εντροπίας είναι ένας δείκτης διαφοροποίησης της αγοράς. Ο σημαντικότερος δείκτης διαφοροποίησης είναι η συνάρτηση G_p, για $p \in (0, 1)$ με

$$
G_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in \Delta_{++}^n
$$

όπου

$$
\Delta_{++}^n = \{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \in \mathbb{R}^n | \pi_i > 0, \forall i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1\}.
$$

Η συνάρτηση G_p πλεονεκτεί έναντι της συνάρτησης εντροπίας τόσο στην παραγωγή χαρτοφυλακίων όσο και σαν δείκτης διαφοροποίησης. Όταν η G_p χρησιμοποιείται για να παραγάγει χαρτοφυλάκια , η παράμετρος p μπορεί να επιλεγεί έτσι, ώστε να ρυθμίζει τον κίνδυνο καθώς και τα χαρακτηριστικά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου που παράγει. Παρατηρήστε ότι η G_p είναι ομογενής βαθμού 1, οπότε αν $x_1, \ldots, x_n$ είναι θετικοί αριθμοί που δεν αθροίζονται στο 1 κατ ανάγκη, τότε

$$\frac{G_p(x_1,\ldots,x_n)}{x_1+\ldots+x_n} = G_p\left(\frac{x_1}{x_1+\ldots+x_n},\ldots,\frac{x_n}{x_1+\ldots+x_n}\right).$$

Πρόταση 14 *Η συνάρτηση G_p παράγει το χαρτοφυλάκιο $\pi^{(p)}$ με βάρη*

$$\pi_i^{(p)}(t) = \frac{(\mu_i(t))^p}{\sum_{j=1}^n (\mu_j(t))^p}, \tag{84}$$

για όλα τα $i = 1,\ldots,n$, όπου μ_i, $i = 1,\ldots,n$, τα βάρη της αγοράς, και διαδικασία drift $\Theta(t) = (1-p)\int_0^t \gamma^*_{\pi^{(p)}}(s)ds$.

Απόδειξη: Από το θεώρημα 2, η G_p παράγει το χαρτοφυλάκιο με βάρη

$$\pi_i(t) = \left(D_i \log G_p(\mu(t)) + 1 - \sum_{j=1}^n \mu_j(t) D_j \log G_p(\mu(t))\right)\mu_i(t),$$

και διαδικασία drift που ικανοποιεί

$$d\Theta(t) = -\frac{1}{2G_p(\mu(t))}\sum_{i,j=1}^n D_{ij}G_p(\mu(t))\mu_i(t)\mu_j(t)\tau^\mu_{ij}(t)dt,$$

όπου

$$D_i G_p(x) = x_i^{p-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}-1},$$

$$D_{ii}G_p(x) = (x_i x_i)^{p-1}(1-p)\frac{G_p(x)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^2} + (p-1)x_i^{p-2}\frac{G_p(x)}{\sum_{i=1}^n x_i^p},$$

$$D_{ij}G_p(x) = (x_i x_j)^{p-1}(1-p)\frac{G_p(x)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^2}$$

και

$$D_i \log G_p(x) = \frac{x_i^{p-1}}{\sum_{i=1}^n x_i^p}.$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned}
\pi_i(t) &= \left(\frac{\mu_i^{p-1}(t)}{\sum_{i=1}^n \mu_i^p(t)} + 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j(t)\mu_j^{p-1}(t)}{\sum_{i=1}^n \mu_i^p(t)} \right) \mu_i(t) \\
&= \frac{\mu_i^{p-1}(t)}{\sum_{i=1}^n \mu_i^p(t)} \mu_i(t) \\
&= \frac{\mu_i^p(t)}{\sum_{i=1}^n \mu_i^p(t)} \\
&\overset{(84)}{=} \pi_i^{(p)}(t)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
d\Theta(t) &= -\frac{1}{2G_p(\mu(t))} \Big(\sum_{i,j=1}^n (1-p)(\mu_i(t)\mu_j(t))^{p-1} \frac{G_p(\mu(t))}{\left(\sum_{k=1}^n \mu_k^p(t)\right)^2} \mu_i(t)\mu_j(t)\tau_{ij}^{\mu}(t) \\
&+ \sum_{i=1}^n (p-1)\mu_i^{p-2}(t) \frac{G_p(\mu(t))}{\sum_{k=1}^n \mu_k^p(t)} \mu_i^2(t)\tau_{ii}^{\mu}(t))dt \Big) \\
&= \frac{1}{2}(1-p) \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mu_i^p(t)\tau_{ii}^{\mu}(t)}{\sum_{k=1}^n \mu_k^p(t)} - \frac{\sum_{i,j=1}^n \mu_i^p(t)\mu_j^p(t)\tau_{ij}^{\mu}(t)}{\left(\sum_{k=1}^n \mu_k^p(t)\right)^2} \right) dt \\
&\overset{(84)}{=} \frac{1}{2}(1-p) \left(\sum_{i=1}^n \pi_i^{(p)}(t)\tau_{ii}^{\mu}(t) - \sum_{i,j=1}^n \pi_i^{(p)}(t)\pi_j^{(p)}(t)\tau_{ij}^{\mu}(t) \right) dt \\
&= (1-p)\gamma_{\pi^{(p)}}^*(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Το χαρτοφυλάκιο $\pi^{(p)}$, σε σύγκριση με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς, μειώνει την αναλογία των μεγαλύτερων μετοχών και αυξάνει την αναλογία των μικρότερων μετοχών, διατηρώντας παράλληλα τη διάταξη μεταξύ των μετοχών. Είναι σχετικά εύκολο να εφαρμοστεί στη πράξη, αφού απαρτίζεται μόνο από τα βάρη αγοράς και δεν απαιτεί εκτίμηση ή βελτιστοποίηση καμιάς παραμέτρου. Παρατηρούμε επίσης ότι καθώς $p \to 1$, το χαρτοφυλάκιο $\pi^{(p)}$ προσεγγίζει το χαρτοφυλάκιο αγοράς.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το χαρτοφυλάκιο $\pi^{(p)}$ αποτελεί μια ευκαιρία επιτηδειότητας σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο μ της αγοράς.

Πρόταση 15 *Υποθέτουμε ότι η αγορά M είναι μη εκφυλισμένη και ασθενώς διαφοροποιημένη σε ένα πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα $[0,T]$. Τότε η αξία $Z_{\pi^{(p)}}(t)$ του χαρτοφυλακίου με βάρη όπως ορίζονται στη (84), ικανοποιεί*

$$Z_{\pi^{(p)}}(T) > Z_{\mu}(T) \left(n^{-\frac{1}{p}} e^{\frac{1}{2}\epsilon\delta T} \right)^{1-p}.$$

Συνεπώς,
$$\mathbb{P}\left(Z_{\pi^{(p)}}(T) > Z_\mu(T)\right) = 1,$$
για όλα τα $T > \frac{2}{p\epsilon\delta}\log n$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση G_p παράγει το χαρτοφυλάκιο $\pi^{(p)}$ με βάρη όπως ορίστηκαν στη σχέση (84). Άρα, από τον ορισμό 12,

$$\log\left(\frac{Z_{\pi^{(p)}}(T)}{Z_\mu(T)}\right) = \log\left(\frac{G_p(\mu(T))}{G_p(\mu(0))}\right) + \Theta(T), \tag{85}$$

Τώρα, για τη συνάρτηση G_p έχουμε

$$1 = \sum_{i=1}^{n}\mu_i(t) = \left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\right)^p \leq (G_p(\mu(t)))^p \leq n^{1-p},$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε από την ανισότητα Jensen για τη κοίλη συνάρτηση x^p. Παρατηρήστε ότι η $G_p(\mu)$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν η αγορά είναι συγκεντρωμένη σε μια μόνο μετοχή και τη μέγιστη όταν η ανισότητα Jensen ισχύει σαν ισότητα, δηλαδή όταν όλες οι εταιρείες έχουν την ίδια κεφαλαιοποίηση.
Άρα
$$0 \leq \log G_p(\mu(t)) \leq \frac{1-p}{p}\log n.$$

Από την άλλη

$$\pi^{(p)}_{max}(t) = \max_{1\leq i\leq n}\pi^{(p)}_i(t) = \frac{(\mu_{max}(t))^p}{\sum_{j=1}^{n}(\mu_{min}(t))^p} \leq \mu_{max}(t),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int_0^T \gamma^*_{\pi^{(p)}}(t)ds &\overset{(48)}{\geq} \frac{\epsilon}{2}\int_0^T(1-\pi^{(p)}_{max}(t))dt \\ &\geq \frac{1}{2}\epsilon\int_0^T(1-\mu_{max}(t))dt \\ &\overset{(59)}{\geq} \frac{1}{2}\epsilon\delta T.\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω και τη σχέση (85) έπεται

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{Z_{\pi^{(p)}}(T)}{Z_\mu(T)}\right) &= \log G_p(\mu(T)) - \log G_p(\mu(0)) + (1-p)\int_0^T \gamma^*_{\pi^{(p)}}(t)dt \\ &\geq -\frac{1-p}{p}\log n + (1-p)\frac{1}{2}\epsilon\delta T\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{Z_{\pi^{(p)}}(T)}{Z_\mu(T)} &\geq n^{-\frac{1-p}{p}} e^{(1-p)\frac{1}{2}\epsilon\delta T} \\ &= \left(n^{-\frac{1}{p}} e^{\frac{1}{2}\epsilon\delta T}\right)^{(1-p)}\end{aligned}$$

□

3.5 Κυριαρχώντας του Χαρτοφυλακίου της Αγοράς όσο σύντομα θέλουμε

Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε ότι μια ασθενώς διαφοροποιημένη και μη εκφυλισμένη αγορά επιτρέπει, σε αυθαίρετα μικρό χρονικό ορίζοντα, τη δημιουργία χαρτοφυλακίων που έχουν καλύτερη απόδοση από εκείνη της αγοράς, αρκεί η αρχική μας επένδυση να είναι κατάλληλα μεγάλη.

Ορισμός 14 *Για οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο π και πραγματικό αριθμό q, το $\tilde{\pi}^{[q]}$ με*

$$\tilde{\pi}^{[q]}(t) = q\pi(t) + (1-q)\mu(t), \quad t \in [0,\infty) \tag{86}$$

λέγεται q-είδωλο του π (q-mirror image of π) ως προς το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Είναι προφανές ότι το $\tilde{\pi}^{[q]}$ είναι ένα χαρτοφυλάκιο.

Πρόταση 16 *Η αξία του χαρτοφυλακίου $\tilde{\pi}^{[q]}$ σε σχέση με την αγορά δίνεται από*

$$\log\left(\frac{Z_{\tilde{\pi}^{[q]}}(T)}{Z_\mu(T)}\right) = q\log\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)}\right) + \frac{q(1-q)}{2}\int_0^T \tau^\mu_{\pi\pi}(t)dt \tag{87}$$

Απόδειξη: Από τη σχέση (44), έχουμε $\sigma.\beta.$

$$d\log\left(\frac{Z_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{Z_\mu(t)}\right) = \sum_{i=1}^n (\tilde{\pi}_i^{[q]}(t) - \mu_i(t))d\log\mu_i(t) + (\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t) - \gamma^*_\mu(t))dt,$$

και

$$d\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right) = \sum_{i=1}^n (\pi_i(t) - \mu_i(t))d\log\mu_i(t) + (\gamma^*_\pi(t) - \gamma^*_\mu(t))dt.$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
d\log\left(\frac{Z_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)}{Z_\mu(t)}\right) &\overset{(87)}{=} q\sum_{i=1}^n(\pi_i(t)-\mu_i(t))d\log\mu_i(t)+(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)-\gamma^*_\mu(t))dt \\
&= qd\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right)+\Big(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)-\gamma^*_\mu(t)-q\gamma^*_\pi(t)+q\gamma^*_\mu(t)\Big)dt \\
&= qd\log\left(\frac{Z_\pi(t)}{Z_\mu(t)}\right)+\Big(\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}(t)-q\gamma^*_\pi(t)+(q-1)\gamma^*_\mu(t)\Big)dt.
\end{aligned} \tag{88}
$$

Εύκολα βλέπει κανείς, από τη σχέση (37), ότι

$$
\tau^\mu_{\tilde{\pi}^{[q]}\tilde{\pi}^{[q]}}(t)=q^2\tau^\mu_{\pi\pi}(t), \tag{89}
$$

διότι

$$
\begin{aligned}
\tau^\mu_{\tilde{\pi}^{[q]}\tilde{\pi}^{[q]}}(t) &= \Big(\tilde{\pi}^{[q]}(t)-\mu(t)\Big)\,\sigma(t)\,\Big(\tilde{\pi}^{[q]}(t)-\mu(t)\Big)^T \\
&= q^2\left(\pi(t)-\mu(t)\right)\sigma(t)\left(\pi(t)-\mu(t)\right)^T \\
&= q^2\tau^\mu_{\pi\pi}(t).
\end{aligned}
$$

Από τη παραπάνω σχέση και το λήμμα 3 έχουμε

$$
\begin{aligned}
\gamma^*_{\tilde{\pi}^{[q]}}-q\gamma^*_\pi &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n(\tilde{\pi}^{[q]}-q\pi_i)\tau^\mu_{ii}+q\tau^\mu_{\pi\pi}-\tau^\mu_{\tilde{\pi}^{[q]}\tilde{\pi}^{[q]}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big((1-q)\sum_{i=1}^n\mu_i\tau^\mu_{ii}+q\tau^\mu_{\pi\pi}-q^2\tau^\mu_{\pi\pi}\Big) \\
&= (1-q)\gamma^*_\mu+\frac{q(1-q)}{2}\tau^\mu_{\pi\pi}
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στη σχέση (88) έπεται το ζητούμενο.

□

Πρόταση 17 *Έστω ένα χαρτοφυλάκιο π που ικανοποιεί*

$$
\mathbb{P}\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)}\geq\beta\right)=1 \text{ ή } \mathbb{P}\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)}\leq\frac{1}{\beta}\right)=1
$$

και

$$
\mathbb{P}\left(\int_0^T\tau^\mu_{\pi\pi}(t)dt\geq m\right)=1,
$$

για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $T > 0$, $m > 0$ και $0 < \beta < 1$. Τότε υπάρχει κάποιο άλλο χαρτοφυλάκιο $\hat{\pi}$ με

$$\mathbb{P}\left(Z_{\hat{\pi}}(T) < Z_\mu(T)\right) = 1.$$

Απόδειξη: Έστω $\mathbb{P}\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)} \leq \frac{1}{\beta}\right) = 1$. Εφαρμόζοντας τη προηγούμενη πρόταση για $\hat{\pi} = \tilde{\pi}^{[q]}$ και $q > 1 + \frac{2}{m}\log\frac{1}{\beta}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{Z_{\tilde{\pi}^{[q]}}(T)}{Z_\mu(T)}\right) &= q\Big[\log\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)}\right) + \frac{1-q}{2}\int_0^T \tau^\mu_{\pi\pi}(t)dt\Big] \\ &\leq q\Big[\log\frac{1}{\beta} + \frac{1-q}{2}m\Big] < 0,\ \sigma.\beta.,\end{aligned}$$

οπότε και

$$\frac{Z_{\tilde{\pi}^{[q]}}(T)}{Z_\mu(T)} \leq 1\ \sigma.\beta.$$

Αν τώρα ισχύει η $\mathbb{P}\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)} \geq \beta\right) = 1$, επιλέγουμε $\hat{\pi} = \tilde{\pi}^{[q]}$ με $q < \min(0, 1 - \frac{2}{m}\log\frac{1}{\beta})$. Τότε από τη προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{Z_{\tilde{\pi}^{[q]}}(T)}{Z_\mu(T)}\right) &= q\Big[\log\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)}\right) + \frac{1-q}{2}\int_0^T \tau^\mu_{\pi\pi}(t)dt\Big] \\ &\leq q\Big[\log\beta + \frac{1-q}{2}m\Big] < 0,\ \sigma.\beta.,\end{aligned}$$

διότι $\frac{1-q}{2}m > -\log\beta$ και άρα $\log\beta + \frac{1-q}{2}m > 0$.

□

Τώρα ας θεωρήσουμε το χαρτοφυλάκιο

$$\hat{\pi}(t) = qe_1 + (1-q)\mu(t), \quad t \in [0, \infty) \tag{90}$$

όπου $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ και q ένας πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 1. Το χαρτοφυλάκιο $\hat{\pi}$ παίρνει θετική θέση στη πρώτη μετοχή και αρνητική θέση στην αγορά. Ειδικώτερα,

$$\hat{\pi}_1(t) = q + (1-q)\mu_1(t) \text{ και } \hat{\pi}_i(t) = (1-q)\mu_i(t)$$

για $i = 2, \ldots, n$. Τότε, υποθέτοντας ότι τα χαρτοφυλάκια $\pi = e_1$ και μ έχουν την ίδια αρχική αξία έχουμε

$$\frac{Z_\pi(T)}{Z_\mu(T)} = \frac{X_1(T)/X_1(0)}{(X_1(T) + \ldots + X_n(T))/(X_1(0) + \ldots + X_n(0))} = \frac{\mu_1(T)}{\mu_1(0)}.$$

Επομένως, από τη πρόταση 16 και τη (89) έπεται

$$\log\left(\frac{Z_{\hat{\pi}}(T)}{Z_{\mu}(T)}\right) = q\log\frac{\mu_1(T)}{\mu_1(0)} - \frac{q(q-1)}{2}\int_0^T \tau_{11}^{\mu}(t)dt, \tag{91}$$

και σαν συνέπεια αυτής έχουμε τη σύγκριση

$$\begin{aligned}\frac{Z_{\hat{\pi}}(T)}{Z_{\mu}(T)} &= \left(\frac{\mu_1(T)}{\mu_1(0)}\right)^q \exp\Big(-\frac{q(q-1)}{2}\int_0^T \tau_{11}^{\mu}(t)dt\Big)\\ &\leq \left(\frac{\mu_1(T)}{\mu_1(0)}\right)^q, \quad T\in[0,\infty).\end{aligned} \tag{92}$$

Αν υποθέσουμε ότι η αγορά είναι μη εκφυλισμένη και ασθενώς διαφοροποιημένη στο [0,T], από την ανισότητα Cauchy - Schwarz και το λήμμα 6,

$$\begin{aligned}\int_0^T \tau_{11}^{\mu}(t)dt &\geq \epsilon\int_0^T (1-\mu_{max}(t))^2 dt > \frac{\epsilon}{T}\Big(\int_0^T (1-\mu_{max}(t))\Big)^2\\ &> \frac{\epsilon}{T}(\delta T)^2 = \epsilon\delta^2 T.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\beta = \mu_1(0)$ έχουμε

$$\frac{\mu_1(T)}{\mu_1(0)} = \frac{\mu_1(T)}{\beta} < \frac{1}{\beta},$$

δηλαδή,

$$\mathbb{P}\left(\frac{Z_{\pi}(T)}{Z_{\mu}(T)} < \frac{1}{\beta}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\mu_1(T)}{\mu_1(0)} < \frac{1}{\beta}\right) = 1 \text{ και } \mathbb{P}\left(\int_0^T \tau_{11}^{\mu}(t)dt \geq \epsilon\delta^2 T\right) = 1.$$

Επομένως ισχύει η πρόταση 17 με

$$q = q(T) > 1 + \frac{2}{\epsilon\delta^2 T}\log\frac{1}{\mu_1(0)}, \tag{93}$$

και άρα το χαρτοφυλάκιο $\hat{\pi}$ έχει τη στιγμή T οπωσδήποτε μικρότερη απόδοση από το χαρτοφυλάκιο αγοράς. Το χαρτοφυλάκιο $\hat{\pi}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία άλλων χαρτοφυλακίων που περιέχουν μόνο θετικές θέσεις και επιτυγχάνουν καλύτερη απόδοση από το χαρτοφυλάκιο της αγοράς, πέρα από οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα $T \in (0,\infty)$. Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε ότι είναι εφικτή η δημιουργία τέτοιων χαρτοφυλακίων.
Θεωρούμε την αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που επενδύει €$\frac{q}{(\mu_1(0))^q}$ στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς και -€1 στο χαρτοφυλάκιο $\hat{\pi}$ της σχέσης (90) και

έστω $Z_{\hat{\pi}}(0) = Z_\mu(0) = 1$. Η αξία αυτής της στρατηγικής με αρχικό κεφάλαιο $z = \frac{q}{(\mu_1(0))^q} - 1 > 0$ είναι

$$\begin{aligned} Z_h(t) &= q\frac{Z_\mu(t)}{(\mu_1(0))^q} - Z_{\hat{\pi}}(t) \\ &= \frac{Z_\mu(t)}{(\mu_1(0))^q}\Big[q - \frac{Z_{\hat{\pi}}(t)}{Z_\mu(t)}(\mu_1(0))^q\Big] \\ &\overset{(92)}{\geq} \frac{Z_\mu(t)}{(\mu_1(0))^q}\Big[q - (\mu_1(t))^q\Big] > 0, \end{aligned}$$

όπου για τη τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $q > 1 > (\mu_1(t))^q$.
Η διαδικασία αυτή συμπίπτει με την αξία $Z_\eta(t)$ που δημιουργείται από το χαρτοφυλάκιο $\eta(t)$ με βάρη

$$\eta_i(t) = \frac{1}{Z_h(t)}\Big[\frac{q\mu_i(t)}{(\mu_1(0))^q}Z_\mu(t) - \hat{\pi}_i(t)Z_{\hat{\pi}}(t)\Big], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{94}$$

τα οποία ικανοποιούν $\sum_{i=1}^n \eta_i(t) = 1$.

Λήμμα 10 *Το χαρτοφυλάκιο η, με βάρη όπως ορίστηκαν στη σχέση (94), περιέχει μόνο θετικές θέσεις στις μετοχές.*

Απόδειξη: Για $i = 2, \ldots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &\overset{(90)}{=} \frac{1}{Z_h(t)}\Big[\frac{q\mu_i(t)}{(\mu_1(0))^q}Z_\mu(t) + (q-1)\mu_i(t)Z_{\hat{\pi}}(t)\Big] \\ &\overset{(92)}{\geq} \frac{1}{Z_h(t)}\Big[\frac{q\mu_i(t)}{(\mu_1(0))^q}\frac{(\mu_1(0))^q}{(\mu_1(t))^q}Z_{\hat{\pi}}(t) + (q-1)\mu_i(t)Z_{\hat{\pi}}(t)\Big] \\ &= \frac{1}{Z_h(t)}Z_{\hat{\pi}}(t)\mu_i(t)\Big[\frac{q}{(\mu_1(t))^q} + q - 1\Big] > 0. \end{aligned}$$

Αν τώρα $i = 1$, από τη (90) και το γεγονός $q - (q-1)\mu_1(t) > 0$ (ισχύει διότι $(q-1)(1-\mu_1(t)) > -1$), έχουμε

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{1}{Z_h(t)}\Big[\frac{q\mu_1(t)}{(\mu_1(0))^q}Z_\mu(t) - (q - (q-1)\mu_1(t))Z_{\hat{\pi}}(t)\Big] \\ &\overset{(92)}{>} \frac{1}{Z_h(t)}\Big[\frac{q\mu_1(t)}{(\mu_1(0))^q}Z_\mu(t) - (q - (q-1)\mu_1(t))\Big(\frac{\mu_1(t)}{\mu_1(0)}\Big)^q Z_\mu(t)\Big] \\ &= \frac{Z_\mu(t)}{Z_h(t)(\mu_1(0))^q}\mu_1(t)\Big[q - q(\mu_1(t))^{q-1} + (q-1)(\mu_1(t))^q\Big] \\ &= \frac{Z_\mu(t)}{Z_h(t)(\mu_1(0))^q}\mu_1(t)\Big[q(1 - (\mu_1(t))^{q-1}) + (q-1)(\mu_1(t))^q\Big] \\ &> 0, \text{ διότι } q > 1 > (\mu_1(t))^q \end{aligned}$$

$\square$

Δείξαμε ότι όλα τα βάρη του χαρτοφυλακίου είναι μη αρνητικά. Επιπλέον, το χαρτοφυλάκιο η παίρνει θετική θέση στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς και αρνητική θέση στο χαρτοφυλάκιο $\hat{\pi}$, που έχει μικρότερη απόδοση από την αγορά στο χρόνο $t = T$. Έτσι, είναι εύκολο να δει κανείς, ότι το η στο χρόνο $t = T$ ξεπερνά το χαρτοφυλάκιο της αγοράς που ξεκινά με το ίδιο αρχικό κεφάλαιο.
Πράγματι,

$$\begin{aligned}
Z_h(T) &= \frac{q}{(\mu_1(0))^q} Z_\mu(T) - Z_{\hat{\pi}}(T) \\
&= \frac{q}{(\mu_1(0))^q} Z_\mu(T) - Z_\mu(T) + Z_\mu(T) - Z_{\hat{\pi}}(T) \\
&= \Big(\frac{q}{(\mu_1(0))^q} - 1\Big) Z_\mu(T) + (Z_\mu(T) - Z_{\hat{\pi}}(T)) \\
&\overset{(17)}{>} \Big(\frac{q}{(\mu_1(0))^q} - 1\Big) Z_\mu(T) = z Z_\mu(T),
\end{aligned}$$

και το παραπάνω αναπαριστά την αξία του χαρτοφυλακίου αγοράς με αρχικό κεφάλαιο z.
Παρατηρήστε ότι καθώς $T \to 0$, το αρχικό κεφάλαιο $z(T) = \frac{q(T)}{(\mu_1(0))^{q(T)}} - 1$, που απαιτείται, αυξάνει χωρίς κανένα περιορισμό. Έτσι, όσο πιο γρήγορα θέλουμε να επιτύχουμε μια καλύτερη απόδοση σε σχέση με την αγορά, τόσο μεγαλύτερο θα πρέπει να είναι και το κεφάλαιο που θα διαθέσουμε.

4 Η υπόθεση της Μη Επιτηδειότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε το τυπικό ορισμό της σχετικής επιτηδειότητας, και θα αποδείξουμε ότι η ύπαρξη ενός Ισοδύναμου Martingale Μέτρου αποκλείει στρατηγικές επιτηδειότητας.
Θα δείξουμε ότι σε μια αγορά που είναι ασθενώς διαφοροποιημένη, και άρα χωρίς ένα Ισοδύναμο Martingale Μέτρο, η αγορά παρόλα αυτά μπορεί να είναι πλήρης, οπότε πάντα θα υπάρχει τρόπος να αντισταθμίζουμε τα παράγωγα.

4.1 Μη Επιτηδειότητα και Ύπαρξη ενός Ισοδύναμου Martingale Μέτρου

Μια ευκαιρία επιτηδειότητας είναι ένας συνδυασμός επενδύσεων σε ένα χαρτοφυλάκιο, όπου το άθροισμα των αρχικών τιμών των επενδύσεων είναι 0 και σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή T, το άθροισμα των τιμών είναι μη αρνητικό με πιθανότητα 1 και θετικό με θετική πιθανότητα.
Η αρχή της μη επιτηδειότητας είναι μια βασική υπόθεση της Μαθηματικής Χρηματοοικονομίας, διότι πέρα από την βραχυχρόνια περίοδο, η μη επιτηδειότητα εμφανίζεται να είναι μια ακριβής αναπαράσταση των πραγματικών χρηματα-γορών. Επιπλέον, οι ευκαιρίες επιτηδειότητας είναι γεγονότα με πιθανότητα 1, και έξω από τα μαθηματικά λίγα είναι τα γεγονότα με πιθανότητα 1. Εδώ θα παρουσιάσουμε ένα συγγενή όρο, εκείνον της σχετικής επιτηδειότητας και θα δούμε κάποιες συνέπειες αυτού.

Θεωρούμε το μοντέλο αγοράς M του ορισμού 2 υπό τις συνθήκες του ορισμού 1 και της σχέσης (9). Θα θεωρούμε επιπλέον ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο το οποίο εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$dB(t) = B(t)r(t)dt, \quad B(0) = 1, \tag{95}$$

όπου το r είναι μια προοδευτικά μετρήσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την ολοκληρωτική συνθήκη

$$\int_0^T r(t)dt < \infty, \ \sigma.\beta.$$

Για την πληρότητα της περιγραφής ας θυμηθούμε την έννοια των επενδυτικών στρατηγικών. Επενδυτικές στρατηγικές λέγονται εκείνες που μας επιτρέπουν να επενδύσουμε χωρίς κίνδυνο ταυτόχρονα με τις επενδύσεις τις αγοράς. Πιο συγκεκριμένα, μια στρατηγική $h = (h_1, \ldots, h_n)$ θα λέγεται επενδυτική αν είναι F-μετρήσιμη, με τιμές στον $\mathbb{R}^n$ και ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^T \Big(|h_i(t)||\alpha_i(t) - r(t)| + h_i^2(t)\sigma_{ii}(t)\Big)dt < \infty,$$

σ.β., για κάθε $T \in (0,\infty)$. Η συνιστώσα h_i ερμηνεύεται ως τα € που επενδύθηκαν στο χρόνο t, μέσω της στρατηγικής h, για την i μετοχή. Αν ορίσουμε ως $Z_{w,h}(t)$ την αξία στο χρόνο t που αντιστοιχεί στη στρατηγική h με αρχικό κεφάλαιο $w>0$, τότε η $Z_{w,h}(t)-\sum_{i=1}^n h_i(t)$ εκφράζει το ποσό που επενδύεται χωρίς κίνδυνο στην αγορά, και άρα ισχύει

$$dZ_{w,h}(t) = \Big(Z_{w,h}(t) - \sum_{i=1}^n h_i(t)\Big) r(t)dt + \sum_{i=1}^n h_i(t)\{\alpha_i(t)dt + \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(t)dW_\nu(t)\}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{Z_{w,h}(t)}{B(t)} = w + \int_0^t \frac{h(s)}{B(s)}[(\alpha(s)-r(s)e)ds + \xi(s)dW(s)],\ 0\le t\le T, \quad (96)$$

όπου $e=(1,\ldots,1)$. Επιπλέον απαιτούμε να ικανοποιείται η φυσική συνθήκη

$$\mathbb{P}\left(Z_{w,h}(t)\ge 0,\ \forall 0\le t\le T\right) = 1. \quad (97)$$

Η παραπάνω συνθήκη αποκλείει τις περίφημες στρατηγικές διπλασιασμού (doubling strategies) (βλ. [KS1], σελ.8). Τέτοιες στρατηγικές θα λέγονται αποδεκτές (admissible). Θα συμβολίζουμε με $H(w,t)$ τη συλλογή των αποδεκτών στρατηγικών με αρχικό κεφάλαιο $w>0$.

Σε αυτό το σημείο ας δώσουμε το τυπικό ορισμό της σχετικής επιτηδειότητας.

Ορισμός 15 *Έστω δύο χαρτοφυλάκια π, ρ με το ίδιο αρχικό κεφάλαιο $Z_\pi(0)=Z_\mu(0)=1$. Θα λέμε οτι το χαρτοφυλάκιο π αποτελεί έναντι του ρ*

- Μια ευκαιρία επιτηδειότητας *(arbitrage opportunity) σε ένα πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα $[0,T]$ αν υπάρχει μια σταθερά $q=q_{\pi,\rho,T}>0$ για την οποία*

$$\mathbb{P}\left(Z_\pi(t)\ge qZ_\rho(t),\ \forall 0\le t\le T\right) = 1 \quad (98)$$

και επιπλέον

$$\mathbb{P}\left(Z_\pi(T)\ge Z_\rho(T)\right) = 1 \text{ και } \mathbb{P}\left(Z_\pi(T)> Z_\rho(T)\right) > 0. \quad (99)$$

- Μια ευκαιρία μεγαλύτερης μακροπρόθεσμης ανάπτυξης *αν*

$$L_{\pi,\rho} := \liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log\left(\frac{Z_\pi(T)}{Z_\rho(T)}\right) > 0,\ \sigma.\beta. \quad (100)$$

Θα υποθέσουμε επιπλέον ότι υπάρχει μια *αγοραία τιμή κινδύνου* (market price of risk) $\vartheta:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, δηλαδή μια F-μετρήσιμη με

$$\xi(t)\vartheta(t) = \alpha(t)-r(t)e,\ \forall 0\le t\le T \text{ και } \int_0^T ||\vartheta(t)||^2dt<\infty, \quad (101)$$

$\sigma.\beta.$, για κάθε $T \in (0,\infty)$. Στον ορισμό 2 απαιτούμε ο πίνακάς σ να είναι αντιστρέψιμος, έτσι ο πίνακας $\xi(t)$ είναι τάξεως n. Οπότε,

$$\vartheta(t) = \xi^{-1}(t)(\alpha(t) - r(t)e).$$

Όσον αναφορά αυτή τη διαδικασία, μπορούμε να ορίσουμε το εκθετικό local martingale

$$Y(t) = \exp\left(-\int_0^t \vartheta^T(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ||\vartheta(s)||^2 ds\right),\ 0 \le t \le T. \quad (102)$$

Επειδή η $Y(t)$ είναι ένα θετικό local martingale, συνεπάγεται ότι η $Y(t)$ είναι ένα supermartingale, και θα είναι martingale αν και μόνο αν $\mathbb{E}(Y(t)) = 1$ (βλ. [KS], σελ.198).
Επιπλέον ορίζουμε τη μετατοπισμένη κίνηση Brown

$$\hat{W}(t) = W(t) + \int_0^t \vartheta(s)ds,\ 0 \le t \le T. \quad (103)$$

Πρόταση 18 *Κάτω από τις υποθέσεις αυτής της ενότητας, αν υπάρχει ένας χρονικός ορίζοντας $T \in (0,\infty)$ ώστε να υπάρχει επιτηδειότητα στο $[0,T]$, η διαδικασία Y της (102) είναι ένα strict local martingale, δηλαδή $\mathbb{E}(Y(t)) < 1$.*

Απόδειξη: Έστω $\mathbb{E}(Y(t)) = 1$, τότε από το θεώρημα του Girsanov (βλ. [KS], §3.5, σελ.190) υπάρχει ένα μέτρο $\mathbb{Q}_T$ ισοδύναμο του $\mathbb{P}_T$ (συμβολικά γράφουμε $\mathbb{Q}_T \sim \mathbb{P}_T$) στον F_T με $\mathbb{Q}_T(A) := \mathbb{E}(Y(t)1_A)$ ώστε η $\hat{W}(t)$ να είναι ένα local martingale κάτω από το $\mathbb{Q}_T$. Επιπλέον

$$< \hat{W}(t) >=< W(t) + \int_0^t \vartheta(s)ds >=< W(t) >= t$$

και η W είναι μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}_T$, έτσι από το θεώρημα του Lévy (βλ. [KS], θεώρημα 3.16, σελ.157) έχουμε ότι η $\hat{W}$ είναι μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}_T$. Επίσης, για $i = 1,\dots,n$, οι προεξοφλημένες τιμές των μετοχών $\frac{X_i(t)}{B(t)}$ είναι $\mathbb{Q}_T$-martingales, διότι

$$\begin{aligned}
X_i(t) &= X_i(0)\exp\left(\int_0^t \gamma_i(s)ds - \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)\vartheta_\nu(s)ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)d\hat{W}_\nu(s)\right)\\
&\overset{(101)}{=} X_i(0)\exp\left(\int_0^t (\gamma_i(s) - \alpha_i(s) + r(s))ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)d\hat{W}_\nu(s)\right)\\
&\overset{(4)}{=} X_i(0)\exp\left(\int_0^t (r(s) - \frac{1}{2}\sigma_{ii}(s))ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)d\hat{W}_\nu(s)\right).
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{X_i(t)}{B(t)} = X_i(0)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_{ii}(s)ds + \int_0^t \sum_{\nu=1}^n \xi_{i\nu}(s)d\hat{W}_\nu(s)\right),$$

και από τη σχέση (9) το στοχαστικό ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο.
Τώρα, για οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô για τη συνάρτηση $\frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}$, όπου $Z_{w,\pi}$ είναι η αξία του χαρτοφυλακίου π με αρχικό κεφάλαιο $w > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}\right) &= \frac{dZ_{w,\pi}(t)}{B(t)} - \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B^2(t)}dB(t)\\
&\overset{(5),(10)}{=} \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}\pi^T(t)\alpha(t)dt + \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}\pi^T(t)\xi(t)dW(t)\\
&- \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B^2(t)}B(t)r(t)dt\\
&= \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}(\pi^T(t)\alpha(t) - r(t))dt + \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}\pi^T(t)\xi(t)dW(t)\\
&\overset{(103)}{=} \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}(\pi^T(t)\alpha(t) - r(t))dt + \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}\pi^T(t)\xi(t)d\hat{W}(t))\\
&- \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}\pi^T(t)\xi(t)\vartheta(t)dt\\
&\overset{(101)}{=} \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}(\pi^T(t)\alpha(t) - r(t))dt + \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}\pi^T(t)\xi(t)d\hat{W}(t))\\
&- \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}\pi^T(t)(\alpha(t) - r(t)e)dt\\
&= \frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}\pi^T(t)\xi(t)d\hat{W}(t)).
\end{aligned}$$

Λόγω της συνθήκης (9) η αξία $\frac{Z_{w,\pi}(t)}{B(t)}$ είναι ένα τετραγωνικά ολοκληρώσιμο $\mathbb{Q}_T$-martingale, και άρα $D(t) = \frac{Z_{w,\pi}(t)-Z_{w,\rho}(t)}{B(t)}$ είναι ένα τετραγωνικά ολοκληρώσιμο $\mathbb{Q}_T$-martingale, ως διαφορά, για κάθε χαρτοφυλάκιο ρ. Αν τώρα το π αποτελεί μια ευκαιρία επιτηδειότητας έναντι του ρ, τότε $\mathbb{P}_T(Z_{w,\pi}(T) - Z_{w,\rho}(T) \geq 0) = 1$ και $\mathbb{P}_T(Z_{w,\pi}(T) > Z_{w,\rho}(T)) > 0$. Εφόσον $\mathbb{Q}_T \sim \mathbb{P}_T$ θα έχουμε και $\mathbb{Q}_T(D(T) \geq 0) = 1$ και $\mathbb{Q}_T(D(T) > 0) > 0$. Αυτό είναι άτοπο διότι $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}(D(T)) = D(0) = 0$.

□

Σύμφωνα με όσα είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο λοιπόν, αν μια αγορά είναι διαφοροποιημένη , τότε η Y είναι ένα strict local martingale.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις αποπληθωρισμένες μετοχές και την αποπληθωρισμένη αξία της στρατηγικής h ως

$$\hat{X}_i(t) = \frac{Y(t)}{B(t)} X_i(t),\ i = 1, \ldots, n, \text{ και } \hat{Z}_{w,h}(t) = \frac{Y(t)}{B(t)} Z_{w,h}(t), \qquad (104)$$

αντίστοιχα, για $t \in [0, T]$ και για οποιαδήποτε αποδεκτή στρατηγική h και αρχικό κεφάλαιο $w > 0$.

Πρόταση 19 *Οι παραπάνω διαδικασίες ικανοποιούν αντίστοιχα*

$$d\hat{X}_i(t) = \hat{X}_i(t) \sum_{\nu=1}^{n} (\xi_{i\nu}(t) - \vartheta_\nu(t)) dW_\nu(t) \qquad (105)$$

$$d\hat{Z}_{w,h}(t) = \left(\frac{Y(t)}{B(t)} h^T(t) \xi(t) - \hat{Z}_{w,h}(t) \vartheta^T(t) \right) dW(t) \qquad (106)$$

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην συνάρτηση $\hat{X}_i(t)$ έχουμε

$$d\hat{X}_i = \frac{X_i}{B} dY - \frac{Y X_i}{B^2} dB + \frac{Y}{B} dX_i + \frac{1}{B} d < X_i, Y > .$$

Από τη σχέση (102) έπεται

$$dY(t) = -Y(t) \vartheta(t) dW(t),$$

οπότε από τη ταυτότητα Kunita-Watanabe προκύπτει

$$\begin{aligned} d < X_i, Y >_t &= d < X_i \int_0^{\cdot} \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu}(s) dW_\nu(s), -Y \int_0^{\cdot} \vartheta(s) dW(s) >_t \\ &= -Y(t) X_i(t) \sum_{\nu=1}^{n} \vartheta_\nu(t) \xi_{i\nu}(t) dt. \end{aligned}$$

Άρα από τις σχέσεις (5), (102) και (95)

$$
\begin{aligned}
d\hat{X}_i &= -\frac{X_i Y}{B}\sum_{\nu=1}^{n}\vartheta_\nu dW_\nu - \frac{YX_i}{B^2}Brdt \\
&+ \frac{Y}{B}X_i(\alpha_i dt + \sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}dW_\nu) \qquad (107) \\
&- \frac{YX_i}{B}\sum_{\nu=1}^{n}\vartheta_\nu \xi_{i\nu}dt \\
&= \hat{X}_i\sum_{\nu=1}^{n}(\xi_{i\nu}-\vartheta_\nu)dW_\nu \\
&+ \hat{X}_i(\alpha_i - r + \sum_{\nu=1}^{n}\vartheta_\nu\xi_{i\nu})dt \qquad (108) \\
&\overset{(101)}{=} \hat{X}_i\sum_{\nu=1}^{n}(\xi_{i\nu}-\vartheta_\nu)dW_\nu
\end{aligned}
$$

Με την ίδια λογική,

$$
d\hat{Z}_{w,h} = \frac{Z_{w,h}}{B}dY - \frac{YZ_{w,h}}{B^2}dB + \frac{Y}{B}dZ_{w,h} + \frac{1}{B}d < Z_{w,h}, Y >
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
d < Z_{w,h}, Y >_t &= d < Z_{w,h}\int_0^{\cdot}\sum_{i,\nu=1}^{n}\mu_i(s)\xi_{i\nu}(s)dW_\nu(s), -Y\int_0^{\cdot}\vartheta(s)dW(s) >_t \\
&= -Y(t)Z_{w,h}(t)\sum_{i,\nu=1}^{n}\vartheta_\nu(t)\mu_i(t)\xi_{i\nu}(t)dt.
\end{aligned}
$$

Οπότε

$$
\begin{aligned}
d\hat{Z}_{w,h} &= -\hat{Z}_{w,h}\sum_{\nu=1}^{n}\vartheta_\nu dW_\nu - \hat{Z}_{w,h}rdt \\
&+ \hat{Z}_{w,h}(t)rdt + \frac{Y}{B}\sum_{i=1}^{n}h_i(\alpha_i - r)dt \\
&+ \frac{Y}{B}\sum_{i,\nu=1}^{n}h_i\xi_{i\nu}dW_\nu - \frac{Y}{B}\sum_{i}^{n}h_i(\alpha_i - r)dt \\
&= \frac{Y}{B}\sum_{i,\nu=1}^{n}h_i\xi_{i\nu}dW_\nu - \hat{Z}_{w,h}\sum_{\nu=1}^{n}\vartheta_\nu dW_\nu \\
&= \frac{Y}{B}h^T\xi dW - \hat{Z}_{w,h}\vartheta^T dW
\end{aligned}
$$

□

Με άλλα λόγια ο λόγος $\frac{Y(t)}{B(t)}$ συνεχίζει να παίζει το ρόλο του αποπληθωριστικού παράγοντα των μετοχών σε μια τέτοια αγορά ακόμα και εαν το $Y(t)$ είναι local martingale.

Πρόταση 20 *Αν η Y είναι ένα strict local martingale, οι αποπληθωρισμένες τιμές $\hat{X}_i$ είναι strict local martingales για όλα τα $i = 1, \ldots, n$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι μόνο μία από τις αποπληθωρισμένες μετοχές είναι martingale, έστω η $\hat{X}_i$. Τότε θέτοντας $\vartheta_\nu^{(j)} = \xi_{j\nu} - \vartheta_\nu$, για $j = 1, \ldots, n$, από τη σχέση (105) έχουμε

$$d\hat{X}_i(t) = \hat{X}_i(t) \sum_{\nu=1}^{n} (\vartheta_\nu^{(i)})^T(t) dW_\nu(t) = \hat{X}_i(t)\vartheta^{(i)}(t)dW(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{X}_i(t) = \hat{X}_i(0) \exp\left(\int_0^t \vartheta^{(i)}(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ||\vartheta^{(i)}(s)||^2 ds\right). \qquad (109)$$

Ορίζουμε επιπλέον τη διαδικασία $\tilde{W}^{(i)}$ ως

$$\tilde{W}^{(i)}(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta^{(i)}(s)ds,$$

όπου $\tilde{W}^{(i)}$, από το θεώρημα του Girsanov, είναι μια κίνηση Brown ως προς το ισοδύναμο martingale μέτρο $\tilde{\mathbb{P}}_T^{(i)}((A) = \mathbb{E}\left(\frac{\hat{X}_i(T)}{\hat{X}_i(0)} 1_A\right)$.
Τώρα, από τις (109) και (102) έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{Y(t)}{\hat{X}_i(t)} &= \frac{1}{\hat{X}_i(0)} \exp\{-\int_0^t (\vartheta + \vartheta^{(i)})^T dW + \frac{1}{2}\int_0^t (||\vartheta^{(i)}||^2 - ||\vartheta||^2)ds\} \\
&= \frac{1}{\hat{X}_i(0)} \exp\{-\int_0^t (\vartheta + \vartheta^{(i)})^T d\tilde{W}^{(i)} - \int_0^t (\vartheta + \vartheta^{(i)})^T \vartheta^{(i)} ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t (||\vartheta^{(i)}||^2 - ||\vartheta||^2)ds\} \\
&= \frac{1}{\hat{X}_i(0)} \exp\{-\int_0^t (\vartheta + \vartheta^{(i)})^T d\tilde{W}^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t (||\vartheta^{(i)} + \vartheta||)^2 ds\} \\
&= \frac{1}{\hat{X}_i(0)} \exp\{-\int_0^t \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu} d\tilde{W}_\nu^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu}^2 ds\}
\end{aligned}$$

Η $\frac{Y(t)}{\hat{X}_i(t)}$ είναι $\tilde{\mathbb{P}}_T^{(i)}$-martingale, από την (9), άρα $\tilde{\mathbb{E}}\left(\frac{Y(T)}{\hat{X}_i(T)}\right) = \frac{1}{\hat{X}_i(0)}$. Έτσι $\mathbb{E}(Y(T)) = 1$.

Επομένως αν μία από τις αποπληθωρισμένες μετοχές είναι martingale, αναγκαστικά θα είναι και η Y.

□

Ορισμός 16 *Θα λέμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι ένα ισοδύναμο martingale μέτρο ως προς το $\mathbb{P}$ αν*
(i) τα δύο μέτρα είναι ισοδύναμα ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$),
(ii) για όλα τα $i = 1, \ldots, n$, η διαδικασία $\frac{X_i(t)}{B(t)}$ είναι ένα $\mathbb{Q}$-martingale.

Πρόταση 21 *Έστω ότι υπάρχει ένα martingale μέτρο $\mathbb{Q}$ ισοδύναμο του $\mathbb{P}$, και έστω F_t η πλήρωση κάτω από το μέτρο $\mathbb{P}$ της φυσικής διήθησης F_t^w. Τότε δεν υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας.*

Απόδειξη: Έστω λοιπόν ότι υπάρχει ισοδύναμο martingale μέτρο $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ και $F_t = \sigma(F_t^w \cup N)$. Τότε από το θεώρημα του Girsanov υπάρχει ένα martingale $Y(t)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{F_t} = Y(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Η διαδικασία Y, από το θεώρημα αναπαράστασης των martingale (βλ. [KS1], λήμμα 6.7, σελ.24), γράφεται ως

$$Y(t) = 1 + \int_0^t \varphi^T(s) dW(s),\ 0 \leq t \leq T,$$

όπου φ προοδευτικά μετρήσιμη ανέλιξη με $\int_0^T ||\varphi(s)||^2 ds < \infty$. Επειδή το μέτρο $\mathbb{Q}$ είναι ισοδύναμο του $\mathbb{P}$, η Y θα είναι διαφορετική του μηδενός. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τη διαδικασία ϑ με

$$\vartheta(t) = \frac{\varphi(t)}{Y(t)}.$$

Τότε

$$Y(t) = 1 + \int_0^t Y(s)\vartheta^T(s) dW(s),$$

και το σύστημα

$$\begin{cases} dY(t) = Y(t)\vartheta^T(t) dW(t) \\ Y(0) = 1 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση την

$$Y(t) = \exp\left(\int_0^t \vartheta^T(s) dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ||\vartheta(s)||^2 ds\right).$$

Όπως στην (108),

$$\hat{X}_i(t)-\hat{X}_i(0)-\sum_{\nu=1}^{n}(\xi_{i\nu}(t)-\vartheta_\nu(t))dW_\nu(t) = \left(\alpha_i(t) - r(t) - \sum_{\nu=1}^{n}\xi_{i\nu}(t)\vartheta_\nu(t)\right) dt,$$

για τις αποπληθωρισμένες μετοχές. Αν όμως όλες οι $\frac{X_i}{B}$ είναι $\mathbb{Q}$-martingales, τότε και όλες οι $\hat{X}_i$ θα είναι $\mathbb{P}$-martingales. Έτσι το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης θα είναι ένα συνεχές local martingale φραγμένης κύμανσης. Όμως τα μοναδικά local martingale φραγμένης κύμανσης είναι τα σταθερά. Οπότε θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη $\xi(t)\vartheta(t) = \alpha(t) - r(t)e$. Επαναλαμβάνοντας τώρα το επιχείρημα της πρότασης 18, ερχόμαστε σε αντίθεση με τη σχέση (99), την ύπαρξη σχετικής επιτηδειότητας.

□

4.2 Αντιστάθμιση χωρίς την Ύπαρξη ενός Ισοδύναμου Martingale Μέτρου

Σε αυτή την ενότητα θα μιλήσουμε για την αντιστάθμιση και τιμολόγηση παραγώγων μιας αγοράς M, σε ένα χρονικό ορίζοντα $[0, T]$, όταν η M είναι διαφοροποιημένη και άρα όπως είδαμεστην προηγούμενη ενότητα δεν υπάρχει ισοδύναμο martingale μέτρο. Θα ασχοληθούμε με ευρωπαϊκά παράγωγα. Ένα ευρωπαϊκό παράγωγο είναι μια F_T-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή $V : \Omega \to [0, \infty)$ με

$$0 < v = \mathbb{E}\left(\frac{V(T)Y(T)}{B(T)}\right) < \infty, \tag{110}$$

όπου $Y(T)$ όπως ορίστηκε στη (102).
Από τη πλευρά του πωλητή του παραγώγου (για παράδειγμα ένα δικαίωμα επί μιας μετοχής), η $V(T)$ θεωρείται μια υποχρέωση, που πρέπει να καλυφθεί χωρίς κίνδυνο με το κατάλληλο αρχικό κεφάλαιο σήμερα ($t = 0$) και τη σωστή επενδυτική στρατηγική στη διάρκεια του διαστήματος $[0, T]$. Έτσι ο πωλητής ενδιαφέρεται για την *τιμή υπεραντιστάθμισης* (upper hedging price) $U^V(T)$, δηλαδή για το μικρότερο ποσό αρχικού κεφαλαίου που κάνει πιθανή μια τέτοια αντιστάθμιση, χωρίς κίνδυνο. Επομένως,

$$U^V(T) = \inf\{w > 0 | \exists h \in H(w, T) : Z_{w,h}(T) \geq V,\ \sigma.\beta.\}. \tag{111}$$

Η κλασική θεωρία της Μαθηματικής Χρηματοοικονομίας υποθέτει ότι το σύνολο των ισοδύναμων martingale μέτρων $\mathcal{M}$ είναι μη κενό. Τότε η $U^V(T)$ υπολογίζεται ως

$$U^V(T) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V(T)}{B(T)}\right)$$

το supremum της αναμενόμενης προεξοφλημένης αξίας πάνω στο σύνολο όλων των μέτρων πιθανότητας. Όμως, σε σε διαφοροποιημένες αγορές δέν υπάρχει ισοδύναμο martingale μέτρο (δηλαδή $\mathcal{M} = \emptyset$), έτσι η παραπάνω προσέγγιση καταρρέει. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι παρόλο που υπάρχει επιτηδειότητα, μπορεί να βρεθεί η τιμή υπεραντιστάθμισης.

Πρόταση 22 *Υποθέτουμε ότι η Y είναι ένα strict local martingale. Τότε για τη τιμή υπεραντιστάθμισης ισχύει*

$$U^V(T) = v.$$

Απόδειξη: Έστω $A = \{w > 0 | \, \exists h \in H(w,T) : \; Z_{w,h}(T) \geq V, \, \sigma.\beta.\}$. Αν $A \neq \emptyset$, υπάρχει κάποιο $w \in A$ αρχικό κεφάλαιο και μια αποδεκτή στρατηγική h για την οποία το $\hat{Z}_{w,h}$ είναι θετικό και $Z_{w,h}(T) \geq V(T)$. Από την (108) όμως η $\hat{Z}_{w,h}(T)$ είναι ένα local martingale και άρα είναι ένα supermartingale. Τότε

$$\begin{aligned} w \geq \mathbb{E}\left(\hat{Z}_{w,h}(T)\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{Z_{w,h}(T)Y(T)}{B(T)}\right) \\ &\overset{(111)}{\geq} \mathbb{E}\left(\frac{V(T)Y(T)}{B(T)}\right) = v, \end{aligned}$$

και επειδή w είναι ένα τυχαίο στοιχείο του συνόλου A έχουμε

$$U^V(T) = \inf A \geq v,$$

που ισχύει τετριμμένα αν $A = \emptyset$, διότι τότε $U^V(T) = \infty$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, λόγω της παραπάνω σχέσης, αρκεί να δείξουμε ότι $v \in A$.

Ορίζουμε τη διαδικασία $M(t) = \mathbb{E}\left(\frac{V(T)Y(T)}{B(T)} | F_t\right)$, $0 \leq t \leq T$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $M(t)$ είναι ένα μη αρνητικό martingale. Άρα μπορούμε να το αναπαραστήσουμε ως το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$M(t) = v + \int_0^t \psi^T(s) dW(s) \geq 0, \; 0 \leq t \leq T, \tag{112}$$

για κάποια προοδευτικά μετρήσιμη συνάρτηση $\psi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$.
Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια στρατηγική h_* τέτοια ώστε $M = \hat{Z}_{v,h^*}$. Πράγματι, η $\hat{Z}_{v,h_*}$, από τη (106), εξελίσσεται σύμφωνα με

$$d\hat{Z}_{v,h_*}(t) = \left(\frac{Y(t)}{B(t)} h_*^T(t) \xi(t) - \hat{Z}_{v,h_*}(t) \vartheta^T(t)\right) dW(t).$$

Επιπλέον,

$$dM(t) = \psi^T(t)dW(t).$$

Θα επιλέξουμε τη στρατηγική h_* ώστε να ισχύει

$$\psi^T(t) = \frac{Y(t)}{B(t)} h_*^T(t)\xi(t) - M(t)\vartheta^T(t),$$

Θέλουμε λοιπόν

$$\xi^T(t)h_*(t) = \frac{B(t)}{Y(t)}(\psi(t) + M(t)\vartheta(t)), \tag{113}$$

και επειδή ο πίνακας $\sigma = \xi\xi^T$ είναι αντιστρέψιμος,

$$h_*(t) = \frac{B(t)}{Y(t)}(\xi^T(t))^{-1}(\psi(t) + M(t)\vartheta(t)). \tag{114}$$

Έτσι, οι $M, \hat{Z}_{v,h^*}$ θα ικανοποιούν την ίδια στοχαστική εξίσωση και

$$d(\hat{Z}_{v,h_*}(t) - M(t)) = (M(t) - \hat{Z}_{v,h_*}(t))\vartheta^T(t)dW(t).$$

Δηλαδή,

$$\hat{Z}_{v,h_*} - M = \exp\left(-\int_0^t \vartheta^T dW - \int_0^t ||\vartheta||^2 ds\right)(\hat{Z}_{v,h_*}(0) - M(0)) = 0,$$

διότι $\hat{Z}_{v,h_*}(0) = v = M(0)$. Επομένως ισχύει $\hat{Z}_{v,h_*}(t) = M(t)$, και η στρατηγική h_* είναι αποδεκτή γιατί $M(t) \geq 0$. Οπότε $\hat{Z}_{v,h_*}(T) = V(T)$, και άρα $v \in A$.
Βασικό ρόλο, για να μπορούμε να αναπαραγάγουμε ακριβώς την απόδοση του παραγώγου, έχει ότι η διάσταση του αριθμού των μετοχών επιλέχθηκε να είναι ίση με τον αριθμό των πηγών τυχαιότητας. Αυτό διότι η εξίσωση (113) θέλουμε να έχει λύση για όλα τα ψ και ϑ. Όμως η διάσταση της εικόνας της ξ^T είναι ίση με τον αριθμό των μετοχών, αφού εχουμε υποθέσει ότι ο πίνακας $\sigma = \xi\xi^T$ είναι αντιστρέψιμος, και για να μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αυτός θα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των πηγών τυχαιότητας.

□

Άρα, με αυτό το τρόπο, στο μοντέλο αγοράς που θεωρήσαμε (ο αριθμός των μετοχών είναι ίσος με τον αριθμό των πηγών τυχαιότητας) πάντα μπορούμε να αντισταθμίζουμε το παράγωγο. Παρατηρούμε ότι για τη τιμή υπεραντιστάθμισης της (111), ισχύει ο τύπος των Black& Scholes

$$U^V(T) = \mathbb{E}\left(\frac{V(T)Y(T)}{B(T)}\right), \tag{115}$$

κάτω από τις υποθέσεις της προηγούμενης παραγράφου.

Παράδειγμα 1. Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς.
Θεωρούμε ένα ευρωπαϊκό παράγωγο με απόδοση $V(T) = (X_1(T) - K)^+$. Αυτό είναι ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης $K > 0$ ως προς τη πρώτη μετοχή. Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς είναι ένα παράγωγο που δίνει τη δυνατότητα στο κάτοχό του να αγοράσει στην ωρίμανση του συμβολαίου (τη χρονική στιγμή T) τη πρώτη μετοχή έναντι €K. Υποθέτουμε επίσης ότι το επιτόκιο $r(t)$ είναι φραγμένο μακριά από το μηδέν, δηλαδή

$$\mathbb{P}(r(t) \geq r, \, \forall t \geq 0) = 1, \tag{116}$$

για κάποιο θετικό αριθμό r, και έστω ότι η αγορά είναι ασθενώς διαφοροποιημένη σε ένα αρκετά μεγάλο χρονικό ορίζοντα $T \in [0, \infty)$. Τότε για την αξία αυτού του ευρωπαϊκού παραγώγου, από την ανισότητα Jensen, έχουμε

$$\begin{aligned}
U^V(T) &= \mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}(X_1(T) - K)^+\right) \\
&\geq \left(\mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}(X_1(T) - K)\right)\right)^+ \\
&= \left(\mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}X_1(T)\right) - K\mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}\right)\right)^+ \\
&\overset{(116)}{\geq} \left(\mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}X_1(T)\right) - Ke^{-rT}\mathbb{E}(Y(T))\right)^+ \\
&\geq \left(\mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}X_1(T)\right) - Ke^{-rT}\right)^+,
\end{aligned}$$

όπου η για τη τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε ότι η $Y(T)$ είναι ένα supermartingale, με $Y(0) = 1$.
Επιπλέον,

$$U^V(T) \leq \mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}X_1(T)\right).$$

Επομένως, βρήκαμε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα για την U^V,

$$\left(\mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}X_1(T)\right) - Ke^{-rT}\right)^+ \leq U^V(T) \leq \mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}X_1(T)\right).$$

Επειδή η $\hat{X}_1$ είναι και αυτή supermartingale η συνάρτηση $\mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}X_1(T)\right)$ είναι φθίνουσα και άρα υπάρχει το όριο της καθώς $T \to \infty$, οπότε

$$0 \leq \lim_{T\to\infty} U^V(T) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)}X_1(T)\right). \tag{117}$$

Αν η Y είναι strict local martingale τότε από τη πρόταση 20 και η $\hat{X}_1 = \frac{YX_1}{B}$ είναι strict local martingale και άρα $\lim_{T\to\infty} U^V(T) \in [0, X_1(0))$.
Αν υποθέσουμε ακόμα ότι η αγορά M είναι ασθενώς διαφοροποιημένη σε κάποιο διάστημα $[T_0, \infty)$ έχουμε ότι $\lim_{T\to\infty} U^V(T) = 0$, δηλαδή ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που δεν μπορεί ποτέ να ασκηθεί έχει μηδενική αξία.
Πράγματι, από τη πρόταση 15 και τη supermartingale ιδιότητα του $\frac{Y}{B} Z_{\pi^{(p)}}$, για όλα τα $p \in (0,1)$ και για $T \geq \frac{2}{p\epsilon\delta} \log n \vee T_0$, έπεται

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)} X_1(T)\right) &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i(0)\right) \mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)} Z_\mu(T)\right) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i(0)\right) \mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)} Z_{\pi^{(p)}}(T)\right) n^{-\frac{1-p}{p}} e^{-\epsilon\delta(1-p)\frac{T}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i(0)\right) Z_{\pi^{(p)}}(0) n^{-\frac{1-p}{p}} e^{-\epsilon\delta(1-p)\frac{T}{2}} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

και άρα $\lim_{T\to\infty} U^V(T) = 0$.
Παρατηρήστε τη διαφορά που υπάρχει στο αποτέλεσμα αυτής της περίπτωσης και σε εκείνη που υποθέτουμε την ύπαρξη ενός Ισοδύναμου Martingale Μέτρου. Τότε $X_1(0) = \mathbb{E}\left(\frac{Y(T)}{B(T)} X_1(T)\right)$ για κάθε $T \in (0,\infty)$ και $\lim_{T\to\infty} U^V(T) = X_1(0)$, δηλαδή καθώς ο χρονικός ορίζοντας αυξάνει χωρίς περιορισμό, η τιμή αντιστάθμισης του δικαιώματος προσεγγίζει τη σημερινή αξία της πρώτης μετοχής (βλ. [KS1], σελ.62).

Ας εισαγάγουμε τώρα τη φθίνουσα συνάρτηση

$$f(t) = \mathbb{E}\left(\frac{Y(t)}{B(t)} Z_\mu(t)\right),\ 0 < t \leq T,$$

που ικανοποιεί $f(t) = 1$ και $f(t) < Z_\mu(0) = 1$, διότι το $\frac{Y}{B} Z_\mu$ είναι ένα strict local martingale. Η συνάρτηση αυτή έχει μια ιδιαίτερη σημασία, με την έννοια ότι είναι το ελάχιστο αρχικό κεφάλαιο που χρειαζόμαστε για να αναπαραγάγουμε την απόδοση του Z_μ σε χρονικό ορίζοντα t.

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε το σύνολο

$$\Re(T) = \sup\{r > 0 |\, \exists h \in H(1,T) :\ \frac{Z_h(T)}{Z_\mu(T)} \geq r,\ \sigma.\beta.\}.$$

Τότε $\Re(T) = \frac{1}{f(T)}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\Re(T) &= \sup\{r>0|\ \exists h \in H(1,T):\ \frac{Z_h(T)}{Z_\mu(T)} \geq r,\ \sigma.\beta.\} \\
&= \sup\{r>0|\ \exists h \in H(1,T):\ \frac{\frac{1}{r}Z_h(T)}{Z_\mu(T)} \geq 1,\ \sigma.\beta.\} \\
&= \sup\{r>0|\ \exists h \in H(\frac{1}{r},T):\ \frac{Z_h(T)}{Z_\mu(T)} \geq 1,\ \sigma.\beta.\} \\
&= \sup\{r>0|\ \exists h \in H(\frac{1}{r},T):\ Z_h(T) \geq Z_\mu(T),\ \sigma.\beta.\} \\
&= \frac{1}{\inf\{\rho>0|\ \exists h \in H(\rho,T):\ Z_h(T) \geq Z_\mu(T),\ \sigma.\beta.\}} \\
&= \frac{1}{U^{Z_\mu}(T)} \\
&\overset{(115)}{=} \frac{1}{f(T)}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Ο μικρότερος χρόνος για να νικήσουμε την αγορά με δεδομένο αρχικό κεφάλαιο.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει ευκαιρία επιτηδειότητα σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς στο $[0,T]$ για όλα τα $T \in (0,\infty)$ και έστω

$$T(r) = \inf \Gamma(r) = \inf\{T>0|\ \exists h \in H(1,T):\ \frac{Z_h(T)}{Z_\mu(T)} \geq r,\ \sigma.\beta.\}$$

ο μικρότερος χρόνος που απαιτείται ώστε η απόδοση της στρατηγικής μας να είναι τουλάχιστον r φορές μεγαλύτερη από εκείνη της αγοράς. Τότε $T(r) = \inf\{T>0|\ f(T) \leq \frac{1}{r}\}$.

Πράγματι, έστω $T \in \Gamma(r)$, τότε υπάρχει μια στρατηγική h στο σύνολο $H(1,T)$ για την οποία $\frac{\hat{Z}_h(T)}{\hat{Z}_\mu(T)} \geq r,\ \sigma.\beta.$ Επειδη η $\hat{Z}_h$ είναι ένα supermartingale, έπεται

$$1 = Z_h(0) \geq \mathbb{E}(\hat{Z}_h(T)) \geq r\mathbb{E}(\hat{Z}_\mu(T)) = rf(T).$$

Επομένως $\Gamma(r) \subset \{T>0|\, f(T) \leq \frac{1}{r}\}$. Από την άλλη, αν $f(T) \leq \frac{1}{r}$ επιλέγοντας τη στρατηγική h_* της (114), ισχύει $Z_{h_*}(T) = \frac{1}{f(T)} Z_\mu(T),\ \sigma.\beta.$ Έτσι αν $f(T) \leq \frac{1}{r}$ έχουμε ότι $Z_{h_*}(T) \geq rZ_\mu(T),\ \sigma.\beta.$ και άρα $T \in \Gamma(r)$. Συνεπώς $\Gamma(r) = \{T>0|\ f(T) \leq \frac{1}{r}\}$.

Το σύνολο $T(r)$ δεν είναι τίποτα άλλο από τη γενικευμένη αντίστροφη συνάρτηση της f υπολογισμένη στο $\frac{1}{r}$. Ειδικότερα, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει $T(r) = f^{-1}(\frac{1}{r})$.

4.3 Διαφοροποιημένα Μοντέλα Αγοράς

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε δυο παραδείγματα για το πως μπορεί να διατηρηθεί η αγορά διαφοροποιημένη ή τουλάχιστον ασθενώς διαφοροποιημένη. Θα μιλήσουμε για τη περίπτωση που οι μετοχές αποδίδουν μερίσματα. Θα δούμε ότι τα μερίσματα είναι ένα φυσικό μέσο για τη διατήρηση μιας διαφοροποιημένης αγοράς, και θα ερευνήσουμε τη δομή αυτού του μηχανισμού.
Έπειτα, θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα ενός μοντέλου που είναι διαφοροποιημένο σε οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα $[0, T]$, με $0 < T < \infty$.

4.3.1 Διανομή μερισμάτων

Μέχρι τώρα σιωπηλά υποθέσαμε ότι οι μετοχές δεν πληρώνουν μερίσματα. Αυτή είναι μια απλούστευση των αυτοχρηματοδοτούμενων επενδυτικών στρατηγικών. Τα μερίσματα χρησιμοποιούνται από τις εταιρείες ως ένα μέσο διανομής κερδών στους κατόχους των μετοχών. Τα χρήματα αυτά μπορούν να διανεμηθούν με δύο τρόπους. Είτε επιτρέποντας σε μια μετοχή να έχει επιστροφές, χωρίς αυτό να επηρεάζει το κεφάλαιο ή το ποσοστό της μετοχής που υπάρχει στην αγορά, είτε επανεπενδύοντάς τα συνεχώς στην ίδια τη μετοχή, με αποτέλεσμα ο αριθμός των μετοχών να αλλάζει με το χρόνο. Η πρώτη στρατηγική δεν είναι αυτοχρηματοδοτούμενη, διότι επιτρέπει την ανάληψη μερισμάτων από το χαρτοφυλάκιο. Εν αντιθέσει, μια στρατηγική που επανεπενδύει συνεχώς τα μερίσματά της στην ίδια τη μετοχή είναι αυτοχρηματοδοτούμενη, υπό την έννοια ότι δεν περιλαμβάνει αναλήψεις, καθώς επίσης δεν απαιτεί επιπλέον κεφάλαιο για το χαρτοφυλάκιο. Στο πλαίσιο που δουλεύουμε μας ενδιαφέρουν μόνο οι αυτοχρηματοδοτούμενες στρατηγικές.

Ας ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό του μερίσματος.

Ορισμός 17 *Το* μερισματικό επιτόκιο *(dividend rate process) της i μετοχής για όλα τα i, είναι μια μετρήσιμη, προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία δ_i που ικανοποιεί*

$$\int_0^t |\delta_i(s)| ds < \infty, \quad t \in [0, \infty), \ \sigma.\beta.$$

Συνήθως υποθέτουμε ότι το επιτόκιο μερίσματος $\delta_i(t)$ είναι μη αρνητικό, αλλά αυτή η υπόθεση δεν είναι απαραίτητη. Για μια μετοχή X_i με μερίσματα, δηλαδή με ένα επιτόκιο μερίσματος δ_i, ορίζουμε τη διαδικασία συνολικής απόδοσης $\hat{X}_i$ ως

$$\hat{X}_i(t) = X_i(t) \exp\left(\int_0^t \delta_i(s) ds \right), \quad t \in [0, \infty) \tag{118}$$

Η συνολική απόδοση $\hat{X}_i$ αναπαριστά την αξία μιας επένδυσης στη μετοχή X_i, με όλα τα μερίσματα συνεχώς επανεπενδυμένα. Αν για κάποιο i, $\delta_i = 0$, τότε

$\hat{X}_i = X_i$ και $\hat{X}(0) = X(0) \exp 0 = X(0)$.
Αν λογαριθμήσουμε τη διαδικασία συνολικής απόδοσης $\hat{X}_i$ έχω

$$\log \hat{X}_i(t) = \log X_i(t) + \int_0^t \delta_i(s) ds$$

Άρα

$$d \log \hat{X}_i(t) = d \log X_i(t) + \delta_i(t) dt, \quad t \in [0, \infty)$$

Είναι βολικό, για κάθε i, να ορίσουμε το *επαυξημένο επιτόκιο ανάπτυξης* (augmented growth rate) της i-οστής μετοχής

$$\rho_i(t) = \gamma_i(t) + \delta_i(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Έστω $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ τα μερίσματα των μετοχών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ σε μια αγορά M, αντίστοιχα. Για κάθε χαρτοφυλάκιο π ορίζουμε το μερισματικό επιτόκιο δ_π να είναι

$$\delta_\pi(t) = \sum_{i=1}^n \pi_i(t) \delta_i(t), \quad t \in [0, \infty),$$

και τη συνολική αξία του χαρτοφυλακίου με μερίσματα $\hat{Z}_\pi$ ως

$$\hat{Z}_\pi(t) = Z_\pi(t) \exp \left(\int_0^t \delta_\pi(s) ds \right), \quad t \in [0, \infty).$$

Όμοια με πριν

$$d \log \hat{Z}_\pi(t) = d \log Z_\pi(t) + \int_0^t \delta_\pi(s) ds, \quad t \in [0, \infty)$$

Η διαδικασία $\hat{Z}_\pi$ αναπαριστά την συνολική αξία του χαρτοφυλακίου π, στην οποία όλα τα μερίσματα επανεπενδύονται στο χαρτοφυλάκιο σύμφωνα με τα βάρη κάθε μετοχής.
Ορίζουμε επίσης το επαυξημένο επιτόκιο ανάπτυξης του χαρτοφυλακίου π

$$\rho_\pi(t) = \gamma_\pi(t) + \delta_\pi(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Φυσικά για μια αγορά M χωρίς μερίσματα, $\hat{Z}_\pi = Z_\pi$ για όλα τα χαρτοφυλάκια π.

Παρόλο που η σχέση (62) με το πόρισμα 2 δείχνουν ότι ένα κοινό επιτόκιο ανάπτυξης, μεταξύ των μετοχών της αγοράς, δεν είναι αρκετό να διατηρήσει την αγορά διαφοροποιημένη, θα μπορούσαμε να το επιτύχουμε εάν επιτρέπαμε στις εταιρείες να αναδιανέμουν το εισόδημά τους με κάποιο τρόπο. Τα μερίσματα, όπως αναφέραμε και παραπάνω, είναι ένα είδος αναδιανομής του κεφαλαίου. Επομένως, ας θεωρήσουμε μια αγορά στην οποία δεν υπάρχουν αρνητικά μερίσματα και όλες οι μετοχές έχουν το ίδιο επαυξημένο επιτόκιο ανάπτυξης.

Πρόταση 23 *Υποθέτουμε ότι όλες οι μετοχές στην αγορά M έχουν μη αρνητικά μερίσματα και το ίδιο επαυξημένο επιτόκιο ανάπτυξης. Τότε*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (\gamma_\mu^*(t) - \delta_\mu(t))dt \leq 0, \quad \sigma.\beta. \tag{119}$$

Απόδειξη: Έστω ρ το κοινό επαυξημένο επιτόκιο ανάπτυξης των μετοχών. Ορίζουμε τη διαδικασία W με

$$W(t) = \sum_{i=1}^n \hat{X}_i(t), \quad t \in [0,\infty)$$

Η διαδικασία W αναπαριστά την αξία ενός χαρτοφυλακίου με $W(0) = Z_\mu(0)$ στην οποία τα μερίσματα κάθε μετοχής επανεπενδύονται στην ίδια μετοχή. Εφόσον όλες οι X_i έχουν το ίδιο επαυξημένο επιτόκιο ανάπτυξης, σε αντιστοιχία με τη πρόταση 4 έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\log W(T) - \int_0^T \rho(t)dt\right) = 0, \quad \sigma.\beta.$$

Επιπλέον, για όλα τα i, $X_i(t) \leq \hat{X}_i(t), \quad t \in [0,\infty)$, $\sigma.\beta.$, άρα

$$\sum_{i=1}^n X_i(t) \leq \sum_{i=1}^n \hat{X}_i(t),$$

δηλαδή,

$$Z_\mu(t) \leq W(t), \quad t \in [0,\infty),\ \sigma.\beta.$$

Έτσι

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\log Z_\mu(T) - \int_0^T \rho(t)dt\right) \leq 0, \quad \sigma.\beta.$$

Από τη πρόταση 2,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\log Z_\mu(T) - \int_0^T \gamma_\mu(t)dt\right) = 0, \quad \sigma.\beta.$$

Από τα δύο παραπάνω έχουμε

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\int_0^T (\gamma_\mu(t) - \rho(t))dt\right) \leq 0, \quad \sigma.\beta. \tag{120}$$

Γνωρίζοντας ότι

$$\rho_\mu(t) = \rho(t) + \gamma^*_\mu(t), \quad t \in [0, \infty)\ \sigma.\beta.,$$

και ακόμα

$$\rho_\mu(t) = \gamma_\mu(t) + \delta_\mu(t), \quad t \in [0, \infty)\ \sigma.\beta.$$

έπεται

$$\delta_\mu(t) - \gamma^*_\mu(t) = \rho(t) - \gamma_\mu(t), \quad t \in [0, \infty)\ \sigma.\beta.$$

Επομένως, η σχέση (120) είναι ισοδύναμη με

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (\gamma^*_\mu(t) - \delta_\mu(t))dt \leq 0, \quad \sigma.\beta.$$

□

Από τη πρόταση 23 φαίνεται ότι σε μια αγορά, στην οποία οι μετοχές έχουν το ίδιο επαυξημένο επιτόκιο ανάπτυξης, μακροχρόνια, ο χρονικός μέσος όρος του επιτοκίου των μερισμάτων θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσος με το χρονικό μέσο όρο του υπερβάλλοντος επιτοκίου ανάπτυξης της αγοράς.

Πόρισμα 4 *Υποθέτουμε ότι η αγορά M είναι μη εκφυλισμένη και όλες οι μετοχές της έχουν μη αρνητικά μερίσματα και το ίδιο επαυξημένο επιτόκιο ανάπτυξης ρ. Αν η M είναι διαφοροποιημένη, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \delta_\mu(t)dt \geq \delta, \quad \sigma.\beta. \tag{121}$$

Απόδειξη: Αν η αγορά M είναι διαφοροποιημένη, από τη πρόταση 6, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\gamma^*_\mu(t) \geq \delta, \quad t \in [0, \infty),\ \sigma.\beta.$ Τώρα από την πρόταση 23

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (\delta_\mu(t) - \gamma^*_\mu(t))dt \\ &\leq \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \delta_\mu(t)dt - \delta \end{aligned}$$

Άρα

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \delta_\mu(t)dt \geq \delta, \quad \sigma.\beta.$$

□

4.3.2 Αλλαγή της δυναμικής της μεγαλύτερης σε αξία μετοχής

Θα υποθέσουμε ότι οι μετοχές είναι διαδικασίες που εξελίσσονται σύμφωνα με την (1), ο πίνακας μεταβλητότητας ξ των μετοχών δεν μεταβάλλεται στο χρόνο, ισχύει η συνθήκη ομοιόμορφης φραξιμότητας (9) και έστω οι μη αρνητικοί αριθμοί $g_1, \ldots, g_n$. Τότε, για όλα τα $i = 1, \ldots, n$,

$$d \log X_i(t) = \gamma_i(t)dt + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_{i\nu} dW_\nu(t), \quad 0 \le t \le T,$$

όπου

$$\gamma_i(t) = g_i 1_{\Im_i^c(X(t))} - \frac{M}{\delta} \frac{1_{\Im_i(X(t))}}{\log(1-\delta)/\mu_i(t)},$$

για κάποιο αριθμό δ με $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$, και $\Im_i$ τα σύνολα

$$\Im_1 = \{x \in (0,\infty)^n | x_1 \ge \max_{1 \le j \le n} x_j\},\ \Im_n = \{x \in (0,\infty)^n | x_n > \max_{1 \le j \le n-1} x_j\}$$

και

$$\Im_i = \{x \in (0,\infty)^n | x_i > \max_{1 \le j \le i-1} x_j,\ x_i > \max_{i+1 \le j \le n} x_j\},\ i = 2, \ldots, n-1.$$

Αν δηλαδή $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)) \in \Im_i$, η i-οστή μετοχή έχει τη μεγαλύτερη κεφαλαιοποίηση στην αγορά. Έτσι, όλες οι μετοχές εκτός από εκείνες με τη μεγαλύτερη κεφαλαιοποίηση συμπεριφέρονται σαν μια γεωμετρική κίνηση Brown, και η στιγμιαία λογαριθμική απόδοση της μετοχής με τη μεγαλύτερη κεφαλαιοποίηση υπόκειται σε ένα αρνητικό drift με λογαριθμική πολική ιδιομορφία που συγκρατεί το πηλίκο $(1-\delta)/\mu_i$ πάνω από τη μονάδα.

Μπορεί να δειχτεί λοιπόν ότι το σύστημα των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, που έχει προκύψει, έχει μοναδική, ισχυρή λύση (έτσι η F παράγεται από την n-διάστατη κίνηση Brown) και ότι η συνθήκη διαφοροποίησης της αγοράς (59) ικανοποιείται σε οποιοδήποτε χρονικό ορίζοντα. Τέτοια μοντέλα μπορούν να τροποποιηθούν κατάλληλα για να δημιουργήσουν καινούρια μοντέλα που θα είναι ασθενώς διαφοροποιημένα αλλά όχι διαφοροποιημένα. Για περισσότερες πληροφορίες αυτής της κατασκευής μπορεί κανείς να συμβουλευτεί το [FKK], ενώ για περισσότερα παραδείγματα το [OR].

Αναφορές

[D] Dellacherie, C., Meyer, P.A. (1982): *Probabilities and Potential.* B.North-Holland, Amsterdam.

[F1] Fernholz, E.R. (1999): *On the diversity of equity Markets.* Journal of Mathematical Economics.

[F] Fernholz, E.R. (2002): *Stochastic Portfolio Theory.* Springer-Verlag, New York.

[FKK] Fernholz, E.R., Karatzas, I. & Kardaras, C.: *Diversity and arbitrage in equity markets.* Finance & Stochastics **9** (2005), 1-27.

[K] Karatzas, I.: *A Survey of Stochastic Portfolio Theory.* The Eugene Lukacs Lectures, Bowling Green University, May-June 2006. Διαθέσιμο στη διεύθυνση `http://www.math.columbia.edu/ ik/Lukacs%20Lectures.pdf`

[KS] Karatzas, I., Shreve, S.E. (1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Second Edition. Springer-Verlag, New York.

[KS1] Karatzas, I., Shreve, S.E. (1998): *Methods of Mathematical Finance.* Springer-Verlag, New York.

[OR] Osterrieder & Rheinländer: *A note on arbitrage in diverse markets.* Annals of Finance **2** (2006), 287-301.

[RY] Revuz, Yor(1999): *Continuous Martingales and Brownian Motion* (3rd Ed.), Springer, New York. Ελληνική μετάφραση *Κίνηση Brown και Στοιχηματικές διαδικασίες* (2004), Leader Books.

[A.N.S] Shiryaev, A.N.(1995): *Probability (2nd Ed).* Springer-Verlag, New York.