Προετοιμασία για τη πρόοδο

Βασική προετοιμασία είναι οι **Ερωτήσεις κατανόησης** που υπάρχουν στην αρχή κάθε παραγράφου ασκήσεων στις σημειώσεις του Γιαννόπουλου. Υπενθυμίζω ότι η ύλη της προόδου περιλαμβάνει τα πρώτα 4 κεφάλαια, δηλ. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, Ακολουθίες πραγματικών αριθμών, Συνεχείς συναρτήσεις και Όρια συναρτήσεων.

Επιπλέον, οι παρακάτω ασκήσεις προτείνονται για επίλυση.

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο* $\mathbb{R}$:

i) *Αν* $x < y + \varepsilon$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$, *τότε* $x \leq y$.

ii) *Αν* $x \leq y + \varepsilon$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$, *τότε* $x \leq y$.

iii) *Αν* $|x - y| \leq \varepsilon$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$, *τότε* $x = y$.

iv) *Αν* $\alpha < x < \beta$ *και* $\alpha < y < \beta$, *τότε* $|x - y| < \beta - \alpha$.

Άσκηση 2. *Έστω* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι:*

i) *Αν* $\alpha > 1$, *τότε* $\alpha^n > \alpha$, *για κάθε φυσικό αριθμό* $n \geq 2$.

ii) *Αν* $\alpha > 1$, *και* $m, n \in \mathbb{N}$, *τότε* $\alpha^m < \alpha^n$ *αν και μόνο αν* $m < n$.

iii) *Αν* $0 < \alpha < 1$, *τότε* $\alpha^n < \alpha$, *για κάθε φυσικό αριθμό* $n \geq 2$.

iv) *Αν* $0 < \alpha < 1$, *και* $m, n \in \mathbb{N}$, *τότε* $\alpha^m < \alpha^n$ *αν και μόνο αν* $m > n$.

Άσκηση 3. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα* max, min, sup *και* inf *των παρακάτω συνόλων:*

i) $A = \{x > 0 : 0 < x^2 - 1 \leq 2\},\ B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$.

ii) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ 0 < 1/(x^2 - 1) \leq 1\},\ \Delta = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

iii) $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\},\ Z = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$.

iv) $H = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\},\ \Theta = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}$.

v) $I = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 < 0\},\ K = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 < 0\}$.

vi) $\Lambda = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\},\ M = \{x \in \mathbb{Q} : (x - 1)(x + \sqrt{2}) < 0\}$.

vii) $N = \{5 + \frac{6}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{7 - 8n : n \in \mathbb{N}\}$.

Άσκηση 4. *Βρείτε το supremum και το infimum των συνόλων*

$$A = \{1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N}\},\ B = \{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Άσκηση 5. *Δείξτε ότι κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο άνω φράγμα.*

Άσκηση 6. *Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $\alpha_0 \in A$ με την ιδιότητα : για κάθε $\alpha \in A,\ \alpha \leq \alpha_0$. Δείξτε ότι $\alpha_0 = \sup A$.*

Άσκηση 7. *Έστω $A,\ B$ μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Άσκηση 8. *Έστω $A,\ B$ μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν για κάθε $\alpha \in A$ και για κάθε $\beta \in B$ ισχύει $\alpha \leq \beta$.*

Άσκηση 9. *Έστω $A,\ B$ μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει $\beta \in B$ ώστε*

$$\alpha \leq \beta.$$

Δείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$.

Άσκηση 10. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Βρείτε το supremum και το $infimum$ του συνόλου*

$$A = (a, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 11. *Έστω $A,\ B$ μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Δείξτε ότι*

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B,\ \textit{και}\ \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Άσκηση 12. *Έστω $A,\ B$ μη κενά, φραγμένα σύνολα θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $A \cdot B = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$. Δείξτε ότι*

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B,\ \textit{και}\ \inf(A \cdot B) = \inf A + \inf B.$$

Άσκηση 13. *Να αποδειχθεί ότι το $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός.*

Άσκηση 14. *Έστω $\{a_n\},\ \{b_n\}$ δύο ακολουθίες με $a_n \to a$ και $b_n \to b$.*

i) *Αν* $a_n \leq b_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *δείξτε ότι* $a \leq b$.

ii) *Αν* $a_n < b_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *μπορούμε να συμπεράνουμε ότι* $a < b$;

iii) *Αν* $m \leq a_n \leq M$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *δείξτε ότι* $m \leq a \leq M$.

Άσκηση 15. *Έστω* $\{a_n\}$ *ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

i) *Δείξτε ότι* $a_n \to 0$ *αν και μόνο αν* $|a_n| \to 0$.

ii) *Δείξτε ότι αν* $a_n \to a \neq 0$ *τότε* $|a_n| \to |a|$. *Ισχύει το αντίστροφο* ;

iii) *Έστω* $k \geq 2$. *Δείξτε ότι αν* $a_n \to a$ *τότε* $\sqrt[k]{|a_n|} \to \sqrt[k]{|a|}$.

Άσκηση 16. *i)* *Έστω* $a > 0$. *Δείξτε ότι* $\sqrt[n]{a} \to 1$.

ii) *Έστω* $\{a_n\}$ *ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν* $a_n \to a > 0$ *τότε* $\sqrt[n]{a} \to 1$. *Τί μπορείτε να πείτε αν* $a_n \to 0$;

iii) *Δείξτε ότι* $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Άσκηση 17. *1.* *Έστω* $a \in \mathbb{R}$ *με* $|a| < 1$. *Δείξτε ότι η ακολουθία* $b_n = a^n$ *συγκλίνει στο* 0.

2. *Για ποιές τιμές του* $x \in \mathbb{R}$ *συγκλίνει η ακολουθία* $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$

Άσκηση 18. *Να δειχθεί, με τον ορισμό, ότι η ακολουθία* $x_n = \frac{n}{2n^2-1}$ *συγκλίνει στο* 0.

Άσκηση 19. *Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:*

i) $a_n = \frac{n^3+5n^2+2}{2n^3+9}$.

ii) $b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$.

iii) $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

iv) $d_n = \frac{n}{2^n}$.

v) $e_n = \frac{2^n+n}{3^n-n}$.

vi) $f_n = \frac{n}{4^n}$.

vii) $g_n = \frac{n^5}{n!}$.

viii) $h_n = \frac{n^n}{n!}$.

ix) $x_n = \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}$.

x) $y_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$.

xi) $z_n = \frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$.

xii) $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}\sin(n^n)}{n+1}$.

xiii) $v_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$.

xiv) $w_n = nc^n,\ |c|<1$.

Άσκηση 20. *Έστω* A *μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$. *Αν* $a = \sup A$, *δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία* $\{a_n\}$ *στοιχείων του* A *με* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Άσκηση 21. *Έστω* $a > 0$. *Θεωρούμε τυχόν* $x_1 > 0$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ορίζουμε*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big).$$

Δείξτε ότι η $\{x_n\}$, *τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον* $\sqrt{a}$. *Βρείτε το* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Άσκηση 22. *Έστω* $\{a_n\}$ *ακολουθία με* $a_n \to a$. *Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία* $\{b_n\}$ *θέτοντας*

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Δείξτε ότι $b_n \to a$.

Άσκηση 23. *i) Έστω* $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$. *Δείξτε ότι*

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots a_k^n} \to \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

ii) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}.$$

Άσκηση 24. *Έστω* $f : [a,b] \to [a,b]$ *συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι υπάρχει* $x \in [a,b]$ *με* $f(x) = x$.

Άσκηση 25. *Έστω* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την* $f(x) > g(x)$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $\rho > 0$ *ώστε* $f(x) > g(x) + \rho$ *για κάθε* $x \in [a,b]$.

Άσκηση 26. *Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δείξτε ότι*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\frac{a}{2},\ a\in\mathbb{R}.$$

Άσκηση 27. *Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι:*

i) *Αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{Q}$, τότε $f(y)=0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.*

ii) *Αν $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{Q}$, τότε $f(y)=g(y)$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.*

iii) *Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{Q}$, τότε $f(y)\le g(y)$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.*

Άσκηση 28. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ -x, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ και ότι αν $x_0\neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}f(x)$.*

Άσκηση 29. *Έστω $\alpha,\ \beta,\ \gamma>0$ και $\lambda<\mu<\nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση*

$$\frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}=0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ,μ) και (μ,ν).

Άσκηση 30. *Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n\in[0,1]$ ώστε $f(x_n)\to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=0$.*