Προετοιμασία για την τελική εξέταση

Όπως και λίγο πριν τη πρόοδο, έτσι και τώρα σας δίνω κάποιες ασκήσεις προετοιμασίας για την τελική εξέταση. Όσοι δεν έδωσαν πρόοδο θα πρέπει να διαβάσουν τις παρακάτω ασκήσεις καθώς και εκείνες που δόθηκαν για την πρόοδο. Οι υπόλοιποι, όσοι δηλαδή έδωσαν πρόοδο, ας ασχοληθούν μόνο με τις παρούσες.

Σας θυμίζω ότι εξίσου σημαντικές είναι και οι **ερωτήσεις κατανόησης** των σημειώσεων.

Ύλη :
Όσοι έδωσαν πρόοδο : κεφ.3-4-5 (2ος τόμος σημ. Γιαννόπουλου)
Όσοι ΔΕΝ έδωσαν πρόοδο : κεφ.1-2-3-4 (1ος τόμος) και κεφ.3-4-5 (2ος τόμος).

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Έστω $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ και $f(x) = x^{1/n},\ x \in [0,1]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. Είναι ομοιόμορφα συνεχής;

Άσκηση 2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b). Δείξτε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν και μόνο αν η f` είναι φραγμένη.

Άσκηση 3. Έστω I διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη. Δείξτε ότι η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισχύει το ίδιο αν η f δεν είναι φραγμένη;

Άσκηση 5. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$. Δείξτε ότι

a. $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|,\ x, y \in \mathbb{R}$

b. f ομοιόμορφα συνεχής

Άσκηση 6. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 1$

ii. $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$

iii. $f : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin^2 x$

iv. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$

v. $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

vi. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$.

vii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

viii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$

Άσκηση 7. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

a. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$

b. $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$

Άσκηση 8. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 9. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 10. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \Big(\int_a^b f^2(x)dx\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_a^b g^2(x)dx\Big)^{1/2}$$

Άσκηση 11. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με τυχόν διάστημα $[a, b]$;

Άσκηση 12. Έστω $f:[0,+\infty)\to$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(0).$$

Άσκηση 13. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$. [Υπόδειξη : Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Riemann]

Άσκηση 14. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}.$$

Άσκηση 15. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s\in[0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^2dx=\frac{f(s)}{3}.$$

Άσκηση 16. Υποθέτουμε ότι η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x\in[0,1]$. Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Άσκηση 17. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=0$. Δείξτε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει

$$|f(x)|\le\Big(\int_0^1|f`(t)|^2dt\Big)^{1/2}.$$