MEM-252: Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων
Ασκήσεις

Οι ασκήσεις που έχουν την μορφή *x.xx* προέρχονται από το βιβλίο *Γ.Δ. Ακρίβης και Β.Α. Δουγαλής., "Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2η έκδοση.* Οι ασκήσεις εκτός του βιβλίου αναφέρονται με την μορφή *x* και παρατίθεται παρακάτω η εκφώνηση τους.

- 21-02-2019

  Έγιναν οι ασκήσεις 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.26, 1.27, 1.28.

- 12-03-2019

  Έγιναν οι ασκήσεις 2.9, 2.18 και οι 1, 2. Από την 2 έγινε μόνο το μισό πρώτο ερώτημα. Η άσκηση αυτή θα συνεχισθεί σε επόμενο εργαστήριο.

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ αντισυμμετρικός πίνακας και έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= A\,y(t), \qquad t \geq 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου οι πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$ και ο $y_0 \in \mathbb{R}$, είναι δοσμένοι. Γνωρίζουμε από την Άσκηση 1.28 ότι

$$\|y(t)\| = \|y(0)\|, \quad \forall t \geq 0. \tag{2}$$

- Γράψτε την έμμεση μέθοδο του Euler και την μέθοδο του τραπεζίου για το το πρόβλημα αρχικών τιμών (1).
- Δείξτε ότι η μέθοδος του τραπεζίου ικανοποιεί το διακριτό ανάλογο της (2), δηλαδή αν $\{Y^n\}_{n\geq 0}$ η ακολουθία προσεγγίσεων που παράγει η μέθοδος του τραπεζίου, τότε

$$\|Y^{n+1}\| = \|Y^0\|, \quad \forall n \geq 0. \tag{3}$$

- Δείξτε ότι η έμμεση μέθοδος του Euler δεν ικανοποιεί το διακριτό ανάλογο της (2), δηλαδή αν $\{Y^n\}_{n\geq 0}$ η ακολουθία προσεγγίσεων που παράγει η έμμεση μέθοδος του Euler, τότε δεν ισχύει η (3).
- Ποια μέθοδος είναι καταλληλότερη για την διακριτοποίηση του προβλήματος αρχικών τιμών (1) και γιατί;

2. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b], \\ y(a) &= y_0, \end{aligned} \tag{4}$$

όπου η συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$ και ο $y_0 \in \mathbb{R}$, είναι δοσμένα. Η μέθοδος του μέσου για το πρόβλημα αρχικών τιμών (4) παράγει μια ακολουθία προσεγγίσεων $\{Y^n\}_{n\geq 0}$ από

$$\begin{aligned} Y^{n+1} &= Y^n + hf(t^{n+\frac{1}{2}}, Y^{n+\frac{1}{2}}), \quad n = 0, \dots, N-1, \\ Y^0 &= y_0, \end{aligned} \tag{5}$$

με $t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(t^n + t^{n+1}\right)$ και $Y^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(Y^n + Y^{n+1}\right)$. Το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου του μέσου (5) ορίζεται ως

$$E^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf\left(t^{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\left(y(t^n) + y(t^{n+1})\right)\right) \tag{6}$$

- Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $\partial = \partial(y)$ τέτοια ώστε

$$\max_{0\leq n\leq N} |E^n| \leq \partial\, h^3.$$

- Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M = M(\partial)$ τέτοια ώστε

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - Y^n| \leq M\, h^2.$$