ΜΕΜ-252: Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων
Η μέθοδος του Euler για προβλήματα αρχικών τιμών
Εργαστήριο 2

Διατύπωση του προβλήματος

Αναζητάμε συνάρτηση $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b], \tag{1}$$
$$y(a) = y_0, \tag{2}$$

όπου η συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$ και ο $y_0 \in \mathbb{R}$, είναι δοσμένα.

Έμμεση μέθοδος του Euler

Δοσμένου ενός φυσικού αριθμού N, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $h = \frac{b-a}{N}$ με κόμβους τα σημεία $t^n = a + nh$, για $n = 0, \ldots, N$. Η έμμεση μέθοδος του Euler υπολογίζει την προσέγγιση $Y^n \in \mathbb{R}$ της $y(t^n)$ από

$$Y^{n+1} = Y^n + h\, f(t^{n+1}, Y^{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{3}$$
$$Y^0 = y_0. \tag{4}$$

Άσκηση 1

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις της έμμεσης μεθόδου του Euler $\{Y^n\}_{n=0}^N$ για το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$y'(t) = \cos\left(y(t)\right), \qquad t \in [0, 1], \tag{5}$$
$$y(0) = 0. \tag{6}$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (5)-(6) είναι η $y(t) = 2\arctan\left(\tanh\left(\frac{t}{2}\right)\right)$, $t \in [0, 1]$. Ζητήστε από το πρόγραμμα σας να εκτυπώσει το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου, το οποίο για ένα δεδομένο N, δίδεται από

$$\mathcal{E}(N) := \max_{0 \le n \le N} |Y^n - y(t^n)|. \tag{7}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (7) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$p(N_1, N_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}. \tag{8}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $p(N_1, N_2) \approx 1$.

Υπόδειξη

Εφαρμόζοντας την έμμεση μέθοδο του Euler για το πρόβλημα αρχικών τιμών (5)-(6), θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Y^{n+1} &= Y^n + h\,\cos\left(Y^{n+1}\right), \quad n = 0, \ldots, N-1 \\ Y^0 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Η Y^{n+1} είναι λύση μιας μη-γραμμικής εξίσωσης. Επομένως, κατά την υλοποίηση της μεθόδου, απαιτείται η ενσωμάτωση κάποιας διαδικασίας προσέγγισης της λύσης της μη-γραμμικής εξίσωσης. Για παράδειγμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο του σταθερού σημείου για την επίλυση της μη-γραμμικής εξίσωσης. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) := x - Y^n - h\,\cos x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Θα γράψουμε την εξίσωση $g(x)=0$ ισοδύναμα στην μορφή $x=\phi(x)$ και έτσι το πρόβλημα προσδιορισμού μιας ρίζας της g ανάγεται σε πρόβλημα προσδιορισμού ενός σταθερού σημείου της ϕ. Για παράδειγμα, $\phi(x)=Y^n+h\cos x$ με $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Μπορούμε να δείξουμε ότι για κατάλληλο h, το Y^{n+1} ορίζεται μονοσήμαντα, δηλαδή η ϕ έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Για να συμβαίνει αυτό αρκεί η $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ να είναι συστολή. Πράγματι,

$$|\phi(x_1)-\phi(x_2)| = h\,|\cos x_1-\cos x_2| \le h\,|x_1-x_2|, \quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

Συνεπώς, αν $h<1$, τότε η ϕ έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Για να το προσεγγίσουμε εκτελούμε λίγα βήματα (πχ $M=3$) της επαναληπτικής μεθόδου

$$\begin{aligned} x^{(m+1)} &= \phi(x^{(m)}), \quad m=0,1,\dots,M,\\ x^{(0)} &= Y^n. \end{aligned}$$

Τέλος, ορίζουμε $Y^{n+1}:=x^{(M)}$, που είναι αρκετά καλή προσέγγιση της ρίζας $x^*=Y^{n+1}$. Δοκιμάσετε το πρόγραμμα σας για $N=20,\,40$ και $M=3$ και καταλήξτε στο στα παρακάτω σφάλματα.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(20) &= 0.00698148\\ \mathcal{E}(40) &= 0.00350388. \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις της έμμεσης μεθόδου του Euler $\{Y^n\}_{n=0}^N$ για το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$y'(t) = e^{-y(t)}, \qquad t\in[0,5], \tag{12}$$

$$y(0) = 1. \tag{13}$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (12)-(13) είναι η $y(t)=\ln(t+e)$, $t\in[0,5]$. Επαναλάβετε τα ερωτήματα της Άσκησης 1.

Υπόδειξη

Εφαρμόζοντας την έμμεση μέθοδο του Euler για το πρόβλημα αρχικών τιμών (12)-(13), θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Y^{n+1} &= Y^n + h\, e^{-Y^{n+1}}, \quad n=0,\dots,N-1\\ Y^0 &= 1. \end{aligned}$$

Η Y^{n+1} είναι λύση μιας μη-γραμμικής εξίσωσης. Επομένως, κατά την υλοποίηση της μεθόδου, απαιτείται η ενσωμάτωση κάποιας διαδικασίας προσέγγισης της λύσης της μη-γραμμικής εξίσωσης. Για παράδειγμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Newton για την επίλυση της μη-γραμμικής εξίσωσης. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) := x - Y^n - h\, e^{-x}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει μοναδική ρίζα. Αρχικά παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f(t,y(t))=e^{-y(t)}$ ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz. (Γιατί;). Αφού η $f(t,y(t))$ ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η g έχει μοναδική λύση, μέσω του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Στόχος είναι να προσδιορίσουμε την ρίζα της $g(x)$, αφού οι ρίζα της θα είναι η $x=Y^{n+1}$, δηλαδή η προσέγγιση η οποία ψάχνουμε. Για να το προσεγγίσουμε εκτελούμε λίγα βήματα (πχ $M=3$) της επαναληπτικής μεθόδου του Newton

$$\begin{aligned} x^{(m+1)} &= x^{(m)} - \frac{g(x^{(m)})}{g'(x^{(m)})}, \quad m=0,1,\dots,M\\ x^{(0)} &= Y^n. \end{aligned} \tag{15}$$

Τέλος, ορίζουμε $Y^{n+1}:=x^{(M)}$, που είναι αρκετά καλή προσέγγιση της ρίζας $x^*=Y^{n+1}$. Δοκιμάσετε το πρόγραμμα σας για $N=20,\,40$ και $M=3$ και καταλήξτε στο στα παρακάτω σφάλματα.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(20) &= 0.01646638\\ \mathcal{E}(40) &= 0.00834353. \end{aligned}$$