MEM-252: Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων
Η άμεση μέθοδος του Euler για συστήματα διαφορικών εξισώσεων
Εργαστήριο 3

Διατύπωση του προβλήματος

Αναζητάμε συνάρτηση $y : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, με $d \geq 1$, η οποία να είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b], \tag{1}$$
$$y(a) = y_0, \tag{2}$$

όπου η συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, οι πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$ και ο $y_0 \in \mathbb{R}^d$, είναι δοσμένα.

Άμεση μέθοδος του Euler

Δοσμένου ενός φυσικού αριθμού N, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $h = \frac{b-a}{N}$ με κόμβους τα σημεία $t^n = a + nh$, για $n = 0, \ldots, N$. Η άμεση μέθοδος του Euler υπολογίζει την προσέγγιση $Y^n \in \mathbb{R}^d$ της $y(t^n)$ από

$$Y^{n+1} = Y^n + hf(t^n, Y^n), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{3}$$
$$Y^0 = y_0. \tag{4}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της ακολουθίας $\{Y^n\}_{n=0}^N$ που παράγεται από την άμεση μέθοδο του Euler, θα είναι ένα διάνυσμα διάστασης d.

Άσκηση 1

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις της άμεσης μεθόδου του Euler $\{Y^n\}_{n=0}^N$ για το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$y'(t) = A\, y(t), \qquad t \in [0, 1], \tag{5}$$
$$y(0) = (1, 0)^T, \tag{6}$$

με τον πίνακα A να ορίζεται ως

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -e^{-2t} \\ e^{2t} & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (5)-(6) είναι η $y(t) = \left(e^{-t}\cos(t), e^t \sin(t)\right)^T$, $t \in [0, 1]$. Για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά την άμεση μέθοδο του Euler, ζητήστε από το πρόγραμμα σας να εκτυπώσει το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου, το οποίο για ένα δεδομένο N, δίδεται από

$$\mathcal{E}(N) := \max_{0 \leq n \leq N} \max_{1 \leq i \leq d} |Y_i^n - y_i(t^n)|. \tag{8}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (8) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$p(N_1, N_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}. \tag{9}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $p(N_1, N_2) \approx 1$.

Υπόδειξη

Επαληθεύστε τα σφάλματα για $N = 20$ και $N = 40$,

$$\mathcal{E}(20) = 0.110972$$
$$\mathcal{E}(40) = 5.632574e-02.$$