ΜΕΜ-252: Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων
Η έμμεση μέθοδος του Euler για συστήματα διαφορικών εξισώσεων
Εργαστήριο 4

Διατύπωση του προβλήματος

Αναζητάμε συνάρτηση $y : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, με $d \geq 1$, η οποία να είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b], \tag{1}$$
$$y(a) = y_0, \tag{2}$$

όπου η συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, οι πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$ και ο $y_0 \in \mathbb{R}^d$, είναι δοσμένα.

Έμμεση μέθοδος του Euler

Δοσμένου ενός φυσικού αριθμού N, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $h = \frac{b-a}{N}$ με κόμβους τα σημεία $t^n = a + nh$, για $n = 0, \ldots, N$. Η έμμεση μέθοδος του Euler υπολογίζει την προσέγγιση $Y^n \in \mathbb{R}^d$ της $y(t^n)$ από

$$Y^{n+1} = Y^n + hf(t^{n+1}, Y^{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{3}$$
$$Y^0 = y_0. \tag{4}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της ακολουθίας $\{Y^n\}_{n=0}^N$ που παράγεται από την έμμεση μέθοδο του Euler, θα είναι ένα διάνυσμα διάστασης d. Η Y^{n+1} είναι λύση ενός μη-γραμμικού συστήματος. Επομένως, κατά την υλοποίηση της μεθόδου, απαιτείται η ενσωμάτωση κάποιας διαδικασίας προσέγγισης της λύσης του μη-γραμμικού συστήματος.

Η μέθοδος του Newton

Η μέθοδος του Newton παράγει προσεγγίσεις μιας ρίζας μιας πραγματικής συνάρτησης $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, για την οποία είναι γνωστή η παράγωγος $g'(x)$. Οι προσεγγίσεις της μεθόδου του Newton, παράγονται από

$$\begin{aligned} x^{(m+1)} &= x^{(m)} - \frac{g(x^{(m)})}{g'(x^{(m)})}, \quad m \geq 0, \\ x^{(0)} &= x_0, \end{aligned} \tag{5}$$

με $x_0 \in \mathbb{R}$ μια αρχική προσέγγιση της ρίζας που θέλουμε να προσεγγίσουμε, για την οποία $g'(x_0) \neq 0$.

Η μέθοδος του Newton μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση συστημάτων d εξισώσεων με d αγνώστους. Θεωρούμε την συνάρτηση $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ με $G(x) = (g_1(x), \ldots, g_d(x))^T$. Στόχος είναι να προσεγγίσουμε την ρίζα της συνάρτησης G. Τότε, η μέθοδος του Newton λαμβάνει την μορφή

$$\begin{aligned} J(x^{(m)}) \left(x^{(m+1)} - x^{(m)} \right) &= -G(x^{(m)}), \quad m \geq 0, \\ x^{(0)} &= x_0, \end{aligned} \tag{6}$$

όπου $J(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της G, που ορίζεται ως

$$J_{ij}(x) = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x), \quad i, j = 1, \ldots, d, \tag{7}$$

και $x_0 \in \mathbb{R}^d$ είναι μια αρχική προσέγγιση της ρίζας, τέτοια ώστε ο πίνακας $J(x_0)$ να είναι αντιστρέψιμος.

Εφαρμογή της μεθόδου του Newton στην έμμεση Euler

Κάθε όρος της ακολουθίας $\{Y^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ο οποίος παράγεται από την έμμεση μέθοδο του Euler (3)-(4), είναι λύση ενός μη-γραμμικού συστήματος. Επομένως, θα πρέπει να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Newton ώστε να προσεγγίσουμε την λύση του μη-γραμμικού συστήματος (3)-(4). Για αυτόν τον σκοπό, εφαρμόζοντας την μέθοδο του Newton στο μη-γραμμικό σύστημα (3)-(4), λαμβάνουμε τις προσεγγίσεις των $\{Y^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ από την (6) με

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= Y^n, \\ G(x) &= x - Y^n - hf(t^{n+1}, x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ J_{ij}(x) &= \delta_{ij} - h\,\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t^{n+1}, x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \text{για} \;\; i,j = 1,\dots,d. \end{aligned} \tag{8}$$

Άσκηση 1

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις της έμμεσης μεθόδου του Euler $\{Y^n\}_{n=0}^N$ για το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [0,1], \tag{9}$$
$$y(0) = (1,0)^T, \tag{10}$$

με $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ και $f_1(t, y(t)) = -y_1(t) - e^{-2t}y_2(t)$ και $f_2(t, y(t)) = y_2(t) + e^{2t}y_1(t)$. Η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (9)-(10) είναι η $y(t) = \left(e^{-t}\cos(t), e^{t}\sin(t)\right)^T$, $t \in [0,1]$. Για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά την έμμεση μέθοδο του Euler, ζητήστε από το πρόγραμμα σας να εκτυπώσει το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου, το οποίο για ένα δεδομένο N, δίδεται από

$$\mathcal{E}(N) := \max_{0\le n\le N}\max_{1\le i\le d}\left|Y_i^n - y_i(t^n)\right|. \tag{11}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (11) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$p(N_1, N_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}. \tag{12}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $p(N_1, N_2) \approx 1$.

Υπόδειξη[1]

Στόχος του Εργαστηρίου 4, είναι η εφαρμογή της μεθόδου του Newton στην έμμεση μέθοδο του Euler. Συνεπώς, θα χρειαστεί να υπολογίσετε τον Ιακωβιανό πίνακα J για το πρόβλημα (9)-(10), όπως αυτός ορίζεται στην (8). Βεβαιωθείτε ότι είναι ο παρακάτω

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1+h & h\,e^{-2t} \\ -h\,e^{2t} & 1-h \end{bmatrix}. \tag{13}$$

[1] Η Άσκηση 1 μπορεί να επιλυθεί και χωρίς την εφαρμογή την μεθόδου του Newton, αφού το πρόβλημα αρχικών τιμών (9)-(10) είναι γραμμικό. Πράγματι, το πρόβλημα αρχικών τιμών (9)-(10) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} y'(t) &= A\,y(t), \qquad t \in [0,1], \\ y(0) &= (1,0)^T, \end{aligned}$$

με τον πίνακα A να ορίζεται ως

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -e^{-2t} \\ e^{2t} & 1 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας την έμμεση μέθοδο του Euler λαμβάνουμε τις προσεγγίσεις $\{Y^n\}_{n=0}^N$ από

$$\begin{aligned} Y^{n+1} &= Y^n + h\,A\,Y^{n+1}, \quad n = 0,\dots,N-1, \\ Y^0 &= y_0. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα, λύνοντας ως προς Y^{n+1} θα έχουμε,

$$(I - h\,A)\,Y^{n+1} = Y^n.$$

Ο πίνακας $(I - h\,A)$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε επιλογή του $h > 0$ (γιατί;), οπότε οι προσεγγίσεις που παράγει η έμμεση μέθοδος του Euler θα δίνονται από

$$\begin{aligned} Y^{n+1} &= (I - h\,A)^{-1}\,Y^n, \quad n = 0,\dots,N-1, \\ Y^0 &= y_0. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών, ο Ιακωβιανός πίνακας δεν εξαρτάτε από το x, οπότε δεν χρειάζεται να υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη της μεθόδου του Newton.

Επαληθεύστε τα σφάλματα για $N = 20$ και $N = 40$ για τρεις επαναλήψεις της μεθόδου του Newton,

$$\mathcal{E}(20) = 0.11791936$$
$$\mathcal{E}(40) = 0.05806159.$$

Άσκηση 2

Θεωρούμε ότι σε κάποιο κλειστό βιότοπο έχουμε δύο είδη, από τα οποία το ένα είναι *θηρευτής* και το άλλο είναι *θήραμα*, π.χ. αλεπούδες και λαγοί, αντίστοιχα. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι πως εξελίσσεται με το χρόνο ο αρχικός πληθυσμός δύο ειδών. Αν y_1 είναι ο πληθυσμός του θηράματος και y_2 είναι ο πληθυσμός του θηρευτή, ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τους είναι το σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων Lotka-Volterra που έχει τη μορφή

$$y_1'(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_1(t) y_2(t), \quad t \in [a, b], \tag{14}$$
$$y_2'(t) = -\gamma y_2(t) + \delta y_1(t) y_2(t), \quad t \in [a, b], \tag{15}$$
$$y_1(a) = \overline{y}_0,$$
$$y_2(a) = \tilde{y}_0.$$

με πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, οι οποίοι περιγράφουν την αλληλεπίδραση των δυο ειδών και $\overline{y}_0$, $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}^2$ ο δοσμένος αρχικός πληθυσμός τους.

Οι παραπάνω εξισώσεις Lotka-Voltera δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά, οπότε θα το προσεγγίσουμε αριθμητικά με την έμμεση μέθοδο του Euler. Θεωρήστε τα παρακάτω δεδομένα για να δοκιμάστε το πρόγραμμα σας.

$$[a, b] = [0, 20], \quad Y^0 = (\overline{y}_0, \tilde{y}_0)^T = (1,\, 0.5)^T, \quad \alpha = 2,\, \beta = 1.1,\; \gamma = 1 \;\text{ και }\; \delta = 0.5, \quad N = [500, 10^4, 2 \cdot 10^4].$$

Τυπώστε το γράφημα των ζευγών $\{Y_1^n, Y_2^n\}_{n=0}^N$, το γράφημα των προσεγγίσεων $\{t^n, Y_1^n\}_{n=0}^N$ και το γράφημα των προσεγγίσεων $\{t^n, Y_2^n\}_{n=0}^N$. Τα δύο τελευταία γραφήματα να γίνουν σε ένα κοινό γράφημα.

Υπόδειξη

Για να λύσετε την Άσκηση 2, αρκεί να τροποποιήσετε κατάλληλα το πρόγραμμα που φτιάξατε για την Άσκηση 1. Θα χρειαστεί να αλλάξετε τις συναρτήσεις $f_i(t, y(t))$, $i = 1, 2$, τον Ιακωβιανό πίνακα, ο οποίος πλέον θα εξαρτάται από το x και να αφαιρέσετε τον έλεγχο για σφάλματα, αφού πλέον δεν μπορούν να υπολογιστούν, διότι δεν γνωρίζουμε την ακριβή λύση του προβλήματος. Επιπλέον για να σχεδιάσετε τα γραφήματα στο τέλος, θα πρέπει να κρατάτε σε ένα διάνυσμα τόσο τις προσεγγίσεις της μεθόδου, όσο και τους κόμβους της διακριτοποίησης του διαστήματος $[a, b]$. Βεβαιωθείτε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας για αυτήν την άσκηση είναι ο παρακάτω

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1 - h\,(\alpha - \beta\, x_2) & h\,\beta\, x_1 \\ -h\,\delta\, x_2 & 1 + h\,(\gamma - \delta\, x_1) \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Άσκηση Bonus

Επαναλάβετέ την Άσκηση 2 με την μέθοδο του τραπεζίου.

Μέθοδος του Τραπεζίου

Δοσμένου ενός φυσικού αριθμού N, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $h = \frac{b-a}{N}$ με κόμβους τα σημεία $t^n = a + nh$, για $n = 0, \ldots, N$. Η μέθοδος του τραπεζίου υπολογίζει την προσέγγιση $Y^n \in \mathbb{R}^d$ της $y(t^n)$ από

$$Y^{n+1} = Y^n + \frac{h}{2}\left(f(t^n, Y^n) + f(t^{n+1}, Y^{n+1})\right), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{16}$$
$$Y^0 = y_0. \tag{17}$$

Υπόδειξη

Για να φτιάξετε το πρόγραμμα για την μέθοδο του τραπεζίου που να υλοποιεί το πρόβλημα της Άσκησης 2, αρκεί να τροποποιήσετε κατάλληλα το πρόγραμμα που φτιάξατε για την Άσκηση 2. Πράγματι, οι μόνες αλλαγές που πρέπει να γίνουν αφορούν τον κατάλληλο ορισμό της συνάρτησης G στην μέθοδο του Newton (8) και ως εκ τούτου και την J, αφού συνδέονται μεταξύ τους μέσω της (7).