ΜΕΜ-252: Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων
Άμεσες μέθοδοι Runge-Kutta
Εργαστήριο 5

Διατύπωση του προβλήματος

Αναζητάμε συνάρτηση $y : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, με $d \geq 1$, η οποία να είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b], \tag{1}$$

$$y(a) = y_0, \tag{2}$$

όπου η συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, οι πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$ και ο $y_0 \in \mathbb{R}^d$, είναι δοσμένα.

Άμεσες μέθοδοι Runge-Kutta

Δοσμένου ενός φυσικού αριθμού N, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $h = \frac{b-a}{N}$ με κόμβους τα σημεία $t^n = a + nh$, για $n = 0, \ldots, N$. Για τις μεθόδους Runge-Kutta θα έχουμε τους παρακάτω παραμέτρους,

- αριθμός σταδίων $q \in \mathbb{N}$,
- ενδιάμεσοι συντελεστές $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για $i, j = 1, \ldots, q$, όπου στην περίπτωση των άμεσων μεθόδων Runge-Kutta θα έχουμε ότι $a_{ij} = 0$ για $j \geq i$,
- ενδιάμεσοι κόμβοι τ_i για $i = 1, \ldots, q$, και
- οι τελικοί συντελεστές b_i για $i = 1, \ldots, q$.

Κάθε τέτοιο σύνολο σταθερών ορίζει μια μέθοδο Runge-Kutta. Έχει επικρατήσει να γράφουμε αυτούς τους αριθμούς σε μορφή μητρώου, όπως παρακάτω

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_q & \end{array} \tag{3}$$

Μια άμεση μέθοδος Runge-Kutta που περιγράφεται από το μητρώο (3) παράγει προσεγγίσεις $\{Y^n\}_{n=0}^N$ οι οποίες δίνονται για $n = 0, \ldots, N-1$ από τις σχέσεις

$$Y^0 = y_0, \tag{4}$$

$$Y^{n,i} = Y^n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t^{n,j}, Y^{n,j}), \quad i = 1, \ldots, q, \tag{5}$$

$$Y^{n+1} = Y^n + h \sum_{i=1}^{q} \beta_i f(t^{n,i}, Y^{n,i}). \tag{6}$$

Οι σχέσεις (4),(5),(6) περιγράφουν την γενική *άμεση* μέθοδο Runge-Kutta με q ενδιάμεσα στάδια.

Ένας εναλλακτικός τρόπος περιγραφής του βήματος της γενικής μεθόδου Runge-Kutta με ενδιάμεσα στάδια είναι ο εξής. Θέτουμε $k^{n,i} := f(t^{n,i}, Y^{n,i})$, και ως εκ τούτου οι σχέσεις (5),(6) γίνονται για $n = 0, \ldots, N-1$,

$$k^{n,i} = f(t^{n,i}, Y^n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, k^{n,j}), \quad i = 1, \ldots, q, \tag{7}$$

$$Y^{n+1} = Y^n + h \sum_{i=1}^{q} \beta_i\, k^{n,i}. \tag{8}$$

Αριθμητική προσέγγιση

Βήμα 1: Θέτουμε $Y^0 := y_0$

Για $n = 0, \dots, N-1$,

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τους ενδιάμεσους κόμβους από

$$t^{n,i} := t^n + h\,\tau_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

Βήμα 3: Για $i = 1, \dots, q$ υπολογίζουμε τα διανύσματα

$$k_l^{n,i} = f_l(t^{n,i}, W^{n,i}), \quad l = 1, \dots, d,$$
$$W^{n,i} = Y^n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, k^{n,j}.$$

Βήμα 4: Τέλος, υπολογίζουμε την προσέγγιση Y^{n+1} από

$$Y^{n+1} = Y^n + h \sum_{i=1}^{q} \beta_i\, k^{n,i}.$$

Κλασσική μέθοδος Runge-Kutta

Ένα παράδειγμα άμεσης μεθόδου Runge-Kutta είναι η ονομαζόμενη *κλασσική μέθοδος Runge-Kutta* η οποία έχει μητρώο

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array} \tag{9}$$

Η κλασσική μέθοδος Runge-Kutta (9) έχει τάξη 4.

Άσκηση 1

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις της κλασσικής μεθόδου Runge-Kutta (9), $\{Y^n\}_{n=0}^{N}$ για το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$y'(t) = \frac{1}{10} y(t), \qquad t \in [0, 1], \tag{10}$$
$$y(0) = 1. \tag{11}$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (10)-(11) είναι η $y(t) = e^{\frac{t}{10}},\ t \in [0, 1]$. Για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά την την κλασσική μέθοδο Runge-Kutta, ζητήστε από το πρόγραμμα σας να εκτυπώσει το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου, το οποίο για ένα δεδομένο N, δίδεται από

$$\mathcal{E}(N) := \max_{0 \le n \le N} |Y^n - y(t^n)|\,. \tag{12}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (12) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$p(N_1, N_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}. \tag{13}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $p(N_1, N_2) \approx 4$.

Υπόδειξη

Επαληθεύστε τα σφάλματα για $N = 20$ και $N = 40$,

$$\mathcal{E}(20) = 5.73541215e - 13$$
$$\mathcal{E}(40) = 3.66373598e - 14.$$

Άσκηση 2

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις της κλασσικής μεθόδου Runge-Kutta (9), $\{Y^n\}_{n=0}^N$ για το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [0,1], \tag{14}$$

$$y(0) = (1,0)^T, \tag{15}$$

με $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ και $f_1(t, y(t)) = -y_1(t) - e^{-2t}y_2(t)$ και $f_2(t, y(t)) = y_2(t) + e^{2t}y_1(t)$. Η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (14)-(15) είναι η $y(t) = (e^{-t}\cos(t), e^t \sin(t))^T$, $t \in [0,1]$. Για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά την την κλασσική μέθοδο Runge-Kutta, ζητήστε από το πρόγραμμα σας να εκτυπώσει το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου, το οποίο για ένα δεδομένο N, δίδεται από

$$\mathcal{E}(N) := \max_{0 \le n \le N} \max_{1 \le i \le d} |Y_i^n - y_i(t^n)|. \tag{16}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (16) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$p(N_1, N_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}. \tag{17}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $p(N_1, N_2) \approx 4$.

Υπόδειξη

Επαληθεύστε τα σφάλματα για $N = 20$ και $N = 40$,

$$\mathcal{E}(20) = 4.88412177e - 07$$
$$\mathcal{E}(40) = 2.96109084e - 08.$$