ΜΕΜ-252: Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων
Άμεσες $k-$βηματικές μέθοδοι
Εργαστήριο 6

Διατύπωση του προβλήματος

Αναζητάμε συνάρτηση $y : [a, b] \to \mathbb{R}^d$, με $d \geq 1$, η οποία να είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [a, b], \tag{1}$$
$$y(a) = y_0, \tag{2}$$

όπου η συνάρτηση $f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, οι πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$ και ο $y_0 \in \mathbb{R}^d$, είναι δοσμένα.

Άμεσες πολυβηματικές μέθοδοι

Δοσμένου ενός φυσικού αριθμού N, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $h = \frac{b-a}{N}$ με κόμβους τα σημεία $t^n = a + nh$, για $n = 0, \dots, N$. Για τις άμεσες πολυβηματικές μεθόδους θα έχουμε τους παρακάτω παραμέτρους,

- αριθμός των αρχικών προσεγγίσεων $k \in \mathbb{N}$,
- οι συντελεστές $\{a_j\}_{j=0}^{k-1} \in \mathbb{R}$,
- οι συντελεστές $\{\beta_j\}_{j=0}^{k-1} \in \mathbb{R}$,

όπου θα υποθέτουμε συνήθως ότι $a_k = 1$ και ότι $|a_0| + |\beta_0| > 0$ έτσι ώστε η μέθοδος να είναι πράγματι k-βηματική. Μια άμεση k-βηματική μέθοδος για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (1)-(2) περιγράφεται από τις σταθερές $\{a_j\}_{j=0}^{k-1}, \{\beta_j\}_{j=0}^{k-1}$ και παράγει προσεγγίσεις $\left\{Y^{n+k}\right\}_{n=0}^{N-k}$ οι οποίες δίνονται για $n = 0, \dots, N-k$ από

$$\begin{aligned} &Y^0, Y^1, \dots, Y^{k-1} \quad \text{δεδομένα}, \\ &Y^{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} a_j\, Y^{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(t^{n+j}, Y^{n+j}), \quad n = 0, \dots, N-k. \end{aligned} \tag{3}$$

Αν p είναι η τάξη μιας ευσταθούς k-βηματικής μεθόδου τότε, ισχύουν τα ακόλουθα σύμφωνα με τον Dahlquist (1959),

- $p \leq k+1$ αν k περιττός,
- $p \leq k+2$ αν k άρτιος.

Γνωρίζουμε ότι οι k-βηματικές μέγιστης τάξης είναι πεπλεγμένες. Για μια ευσταθή άμεση k-βηματική μέθοδο θα έχουμε πάντα $p \leq k$. Στο παρών εργαστήριο θα ασχοληθούμε με άμεσες k-βηματικές μεθόδους για τις οποίες θα ισχύει ότι $p = k$. Πιο συγκεκριμένα, οι μέθοδοι που θα ασχοληθούμε ονομάζονται Adams-Bashforh και συμβολίζονται ως $AB(k)$. Για τις μεθόδους $AB(k)$ θα έχουμε τους παρακάτω παραμέτρους a_j, β_j για $j = 0, \dots, k-1$,

$$a_{k-1} = -1, \quad a_j = 0, \quad j = 0, \dots, k-2, \tag{4}$$

όπου όπως παρατηρούμε οι συντελεστές a_j, $j = 0, \dots, k-1$ είναι ανεξάρτητοι του k. Οι συντελεστές β_j, $j = 0, \dots, k-1$ θα εξαρτώνται από το k και για $k = 2, 3, 4$ θα ορίζονται ως

$$\begin{aligned} k = 2: &\quad \beta_0 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{3}{2} \\ k = 3: &\quad \beta_0 = \frac{5}{12}, \quad \beta_1 = -\frac{4}{3}, \; \beta_2 = \frac{23}{12} \\ k = 4: &\quad \beta_0 = -\frac{9}{24}, \; \beta_1 = \frac{37}{24}, \; \beta_2 = -\frac{59}{24}, \; \beta_3 = \frac{55}{24} \end{aligned} \tag{5}$$

Αριθμητική προσέγγιση

Βήμα 1: Θέτουμε $Y^0 := y_0$.
Βήμα 2: Προσδιορίζουμε τις υπόλοιπες αρχικές συνθήκες $\{Y^n\}_{n=1}^{k-1}$ χρησιμοποιώντας άλλες αριθμητικές μεθόδους με τάξη $q \geq p-1$ όπου p η τάξη της k- πολυβηματικής μεθόδου. Αν χρησιμοποιήσουμε αριθμητικές μεθόδους με τάξη $q < p-1$, τότε η τάξη σύγκλισης θα είναι q.
Βήμα 3: Τέλος, για $n = 0, \ldots, N-k$, υπολογίζουμε την προσέγγιση $Y^{n+k} \in \mathbb{R}^d$ από

$$Y^{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} a_j Y^{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(t^{n+j}, Y^{n+j})$$

Άσκηση 1

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις $\{Y^n\}_{n=0}^{N}$ της $k-$βηματικής μεθόδου $AB(k)$ για $k = 2, 3, 4$, σύμφωνα με τις περιπτώσεις που περιγράφονται παρακάτω, για το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$y'(t) = \frac{1}{10} y(t), \qquad t \in [0, 1], \tag{6}$$

$$y(0) = 1. \tag{7}$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (6)-(7) είναι η $y(t) = e^{\frac{t}{10}}$, $t \in [0, 1]$. Για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά την μέθοδο $AB(k)$, $k = 2, 3, 4$, ζητήστε από το πρόγραμμα σας να εκτυπώσει το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου, το οποίο για ένα δεδομένο N, δίδεται από

$$\mathcal{E}(N) := \max_{0 \leq n \leq N} |Y^n - y(t^n)| . \tag{8}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (8) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$p(N_1, N_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}. \tag{9}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $p(N_1, N_2) \approx k$.

Περίπτωση 1

Υλοποιήστε την $AB(2)$, υπολογίζοντας την αρχική προσέγγιση Y^1 με τη άμεση μέθοδο του Euler.

Περίπτωση 2

Υλοποιήστε την $AB(3)$, υπολογίζοντας τις αρχικές προσεγγίσεις Y^1 και Y^2 με τη κλασσική μέθοδο RK, την οποία είδαμε στο Εργαστήριο 5.

Περίπτωση 3

Υλοποιήστε την $AB(4)$, υπολογίζοντας τις αρχικές προσεγγίσεις Y^1, Y^2 με τη κλασσική μέθοδο RK, την οποία είδαμε στο Εργαστήριο 5 και την προσέγγιση Y^3 με την $AB(3)$.

Υπόδειξη

Επαληθεύστε τα σφάλματα για $N = 20$ και $N = 40$,

Περίπτωση 1

$$\mathcal{E}(20) = 1.48930418e-05$$
$$\mathcal{E}(40) = 3.73238008e-06.$$

Περίπτωση 2

$$\mathcal{E}(20) = 4.63750416e-09$$
$$\mathcal{E}(40) = 6.13538997e-10.$$

Περίπτωση 3

$$\mathcal{E}(20) = 2.78008061e-10$$
$$\mathcal{E}(40) = 1.75344184e-11.$$

Άσκηση 2

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις $\{Y^n\}_{n=0}^N$ της $k-$βηματικής μεθόδου $AB(k)$ για $k = 2, 3, 4$, σύμφωνα με τις περιπτώσεις που περιγράφονται στην Άσκηση 1, για το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [0, 1], \tag{10}$$

$$y(0) = (1, 0)^T, \tag{11}$$

με $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ και $f_1(t, y(t)) = -y_1(t) - e^{-2t}y_2(t)$ και $f_2(t, y(t)) = y_2(t) + e^{2t}y_1(t)$. Η ακριβής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (10)-(11) είναι η $y(t) = \left(e^{-t}\cos(t), e^{t}\sin(t)\right)^T,\ t \in [0, 1]$. Για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά την μέθοδο $AB(k)$, $k = 2, 3, 4,$, ζητήστε από το πρόγραμμα σας να εκτυπώσει το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου, το οποίο για ένα δεδομένο N, δίδεται από

$$\mathcal{E}(N) := \max_{0\leq n\leq N} \max_{1\leq i\leq d} |Y_i^n - y_i(t^n)|\,. \tag{12}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (12) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$p(N_1, N_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}. \tag{13}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $p(N_1, N_2) \approx k$.

Υπόδειξη

Επαληθεύστε τα σφάλματα για $N = 20$ και $N = 40$,

Περίπτωση 1

$$\mathcal{E}(20) = 0.00683023$$
$$\mathcal{E}(40) = 0.00169556.$$

Περίπτωση 2

$$\mathcal{E}(20) = 4.26925802e - 04$$
$$\mathcal{E}(40) = 5.35211044e - 05.$$

Περίπτωση 3

$$\mathcal{E}(20) = 3.25498660e - 05$$
$$\mathcal{E}(40) = 2.08844545e - 06.$$