MEM-253: Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
Ασκήσεις

1 Πεπερασμένα στοιχεία

Άσκηση 1.1 *Διατυπώστε την ασθενή μορφή του προβλήματος δυο σημείων,*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in (0,1) \\ \qquad u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Επιπλέον, διατυπώστε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το παραπάνω πρόβλημα.

Λύση Αρχικά, θεωρούμε των χώρο V έτσι ώστε

$$V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = 0\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με μια συνάρτηση $v \in V$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη. Τότε,

$$\int_0^1 (uv + u'v') = \int_0^1 fv.$$

Έστω η διγραμμική μορφή $\alpha(\phi, \psi) := \int_0^1 (\phi\psi + \phi'\psi')$, τότε, αναζητάμε συνάρτηση $u \in V$ τέτοια ώστε

$$\alpha(u, v) = (f, v), \quad \forall\, v \in V.$$

Έστω $N \geq 1$ ακέραιο, τότε θεωρούμε μια διαμέριση $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$ του $[0,1]$ με ομοιόμορφο βήμα $h = \frac{b-a}{N+1}$. Ορίζουμε τον χώρο πεπερασμένης διάστασης

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_1,\ i = 1, \ldots, N+1, \ \text{και}\ \ v(0) = 0 \right\}.$$

Η διάσταση του χώρου V_h είναι $N+1$ και οι συναρτήσεις

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_j}{h}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1} - x}{h}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, N, \quad \text{και} \quad \phi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_N}{h}, & x_N \leq x \leq x_{N+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases},$$

αποτελούν βάση του. Θεωρούμε το διακριτό πρόβλημα: Ζητείτε συνάρτηση $u_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$\alpha(u_h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall\, \chi \in V_h.$$

Γράφουμε $u_h = \sum_{j=1}^{N+1} c_j \phi_j$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, θα έχουμε για $\chi = \phi_i$, $i = 1, \ldots, N+1$,

$$\sum_{j=1}^{N+1} c_j \left[(\phi_j', \phi_i') + (\phi_j, \phi_i) \right] = (f, \phi_i), \quad i = 1, \ldots, N+1.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με το $(N+1) \times (N+1)$ γραμμικό σύστημα $Ac = b$, όπου $b_i = (f, \phi_i)$ για $i = 1, \ldots, N+1$ και ο πίνακας A αποτελείται από τα στοιχεία

$$A_{ij} = (\phi_j', \phi_i') + (\phi_j, \phi_i) = A_{ji},$$

ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα και αντιστρέψιμος. Επομένως το διακριτό πρόβλημα δύο σημείων έχει ακριβώς μια λύση. □

Άσκηση 1.2 *Διατυπώστε την ασθενή μορφή του προβλήματος δυο σημείων,*

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in (0,1) \\ \qquad u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Επιπλέον, διατυπώστε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το παραπάνω πρόβλημα.

Λύση Αρχικά, θεωρούμε των χώρο V έτσι ώστε

$$V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \, : \, v(0) = v(1) = 0\}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με μια συνάρτηση $v \in V$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη. Τότε,

$$\int_0^1 (uv + u'v') = \int_0^1 fv.$$

Έστω η διγραμμική μορφή $\alpha(\phi, \psi) := \int_0^1 (\phi\psi + \phi'\psi')$, τότε, αναζητάμε συνάρτηση $u \in V$ τέτοια ώστε

$$\alpha(u, v) = (f, v), \quad \forall\, v \in V.$$

Έστω $N \geq 1$ ακέραιο, τότε θεωρούμε μια διαμέριση $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$ του $[0,1]$ με ομοιόμορφο βήμα $h = \frac{b-a}{N+1}$. Ορίζουμε τον χώρο πεπερασμένης διάστασης

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}([0,1]) \, : \, v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_1, \ i = 1, \ldots, N+1, \ \text{ και } \ v(0) = v(1) = 0 \right\}.$$

Η διάσταση του χώρου V_h είναι N και οι συναρτήσεις

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_j}{h}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1} - x}{h}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, N,$$

αποτελούν βάση του. Θεωρούμε το διακριτό πρόβλημα: Ζητείτε συνάρτηση $u_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$\alpha(u_h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall\, \chi \in V_h.$$

Γράφουμε $u_h = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, θα έχουμε για $\chi = \phi_i$, $i = 1, \ldots, N$,

$$\sum_{j=1}^N c_j \left[(\phi_j', \phi_i') + (\phi_j, \phi_i) \right] = (f, \phi_i), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με το $\times$ γραμμικό σύστημα $Ac = b$, όπου $b_i = (f, \phi_i)$ για $i = 1, \ldots, N$ και ο πίνακας A αποτελείται από τα στοιχεία

$$A_{ij} = (\phi_j', \phi_i') + (\phi_j, \phi_i) = A_{ji},$$

ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα και αντιστρέψιμος. Επομένως το διακριτό πρόβλημα δύο σημείων έχει ακριβώς μια λύση. □

Άσκηση 1.3 *Θεωρούμε το πρόβλημα*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in [0,1], \ t \in [0,T], \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \in [0,T], \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

με $g \in \mathcal{C}([0,1])$. Διατυπώστε τις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιώντας για την διακριτοποίηση ως προς τον χρόνο την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

Λύση Αρχικά, θεωρούμε των χώρο V έτσι ώστε

$$V = \mathcal{C}([0,1]).$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με μια συνάρτηση $v \in V$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη. Τότε, η μεταβολική μορφή του προβλήματος είναι: Ζητείται $u(\cdot, t) \in V$ για $t \in [0,1]$, τέτοια ώστε

$$(u_t(\cdot, t), v) + (u_x(\cdot, t), v') = 0, \quad \forall\, v \in V, \ \text{ και } \ u(\cdot, 0) = g.$$

Έστω $N \geq 1$ ακέραιο, τότε θεωρούμε μια διαμέριση $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$ του $[0,1]$ με ομοιόμορφο βήμα $h = \frac{b-a}{N+1}$. Ορίζουμε τον χώρο πεπερασμένης διάστασης

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}([0,1]) \, : \, v|_{x_{i-1}, x_i} \in \mathbb{P}_1, \ i = 1, \ldots, N+1 \right\}.$$

Η διάσταση του χώρου V_h είναι $N+2$ και οι συναρτήσεις

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{h}, & x_{j-1} \le x \le x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{h}, & x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \qquad j = 1, \dots, N,$$

με

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h}, & x_0 \le x \le x_1, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}, \quad \text{και} \quad \phi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{h}, & x_N \le x \le x_{N+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases},$$

αποτελούν βάση του. Θεωρούμε το διακριτό πρόβλημα: Ζητείται συνάρτηση $u_h \in V_h$ τέτοια ώστε

$$(u_{h,t}(\cdot,t),\chi) + (u_{h,x}(\cdot,t),\chi') = 0, \quad \forall\, \chi \in V_h.$$

Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό M και μια διαμέριση του διαστήματος $[0,T]$ από $M+1$ ισαπέχοντα σημεία $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T$, όπου $k = t_{i+1} - t_i$ για $i = 0, \dots, M-1$. Θεωρούμε τις προσεγγίσεις $U^n \in V_h$ για $n = 1, \dots, M$, τέτοιες ώστε

$$\left(\frac{U^n - U^{n-1}}{k}, \chi\right) + ((U^n)_x, \chi') = 0, \quad \forall\, \chi \in V_h, \ \text{with} \ U^0 = g_h,$$

με $g_h \in V_h$ μια προσέγγιση της g. Οι U^n μπορούν να γραφούν σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης, δηλαδή

$$U^n(x) = \sum_{j=0}^{N+1} \alpha_j^n \phi_j(x), \quad x \in [0,1].$$

Επιλέγοντας $\chi = \phi_i$, $i = 0, \dots, N+1$, λαμβάνουμε το γραμμικό σύστημα της μορφής

$$(\mathcal{M} + k\mathcal{S})\alpha^n = \mathcal{M}\alpha^{n-1}, \quad n \ge 1,$$

με $\mathcal{M}$ και $\mathcal{S}$ οι πίνακες μάζας και ακαμψίας, αντίστοιχα, με στοιχεία $\mathcal{M} = \{m_{ij}\}$ και $\mathcal{S} = \{s_{ij}\}$. Οι πίνακες είναι λίγο διαφορετικοί σε σχέση με την περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Dirichlet. □

Άσκηση 1.4 *Προσδιορίστε τους πίνακες στην Άσκηση 1.1, Άσκηση 1.2 και Άσκηση 1.3.*

Λύση

Πίνακες της Άσκησης 1.1

Έστω $\mathcal{S}_{ij} = (\phi_j', \phi_i')$, και $\mathcal{M}_{ij} = (\phi_j, \phi_i)$ για $i, j = 1, \dots, N+1$, με

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{h}, & x_{j-1} \le x \le x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{h}, & x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, N, \quad \text{και} \quad \phi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{h}, & x_N \le x \le x_{N+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}.$$

Παρατηρήστε ότι $\phi_{ij} \neq 0$ μόνο αν $|i-j| < 2$. Συνεπώς, οι πίνακες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{M}$ είναι τριδιαγώνιοι. Αρχικά για τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα ακαμψίας $\mathcal{S}$, έχουμε

$$\mathcal{S}_{ii} = \int_0^1 \phi_i'(x)^2\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i'(x)^2\, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'(x)^2\, dx = \frac{2}{h}, \quad i = 1, \dots, N,$$

και

$$\mathcal{S}_{N+1,N+1} = \int_0^1 \phi_{N+1}'(x)^2\, dx = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \phi_{N+1}'(x)^2\, dx = \frac{1}{h}.$$

Για τα μη-μηδενικά μη-διαγώνια στοιχεία, έχουμε

$$\mathcal{S}_{i,i+1} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)\, dx = -\frac{1}{h}, \quad i = 1, \dots, N,$$

και

$$\mathcal{S}_{i,i-1} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x)\,dx = -\frac{1}{h}, \quad i = 2,\dots,N+1,$$

Ανάλογα, για τον πίνακα μάζας $\mathcal{M}$, έχουμε

$$\mathcal{M}_{ii} = \int_0^1 \phi_i(x)^2\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)^2\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2\,dx = \frac{2h}{3}, \quad i = 1,\dots,N,$$

και

$$\mathcal{M}_{N+1,N+1} = \int_0^1 \phi_{N+1}(x)^2\,dx = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \phi_{N+1}(x)^2\,dx = \frac{h}{3}.$$

Για τα μη-μηδενικά μη-διαγώνια στοιχεία, έχουμε

$$\mathcal{M}_{i,i+1} = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\,dx = \frac{h}{6}, \quad i = 1,\dots,N,$$

και

$$\mathcal{M}_{i,i-1} = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\,dx = \frac{h}{6}, \quad i = 2,\dots,N+1,$$

Πίνακες της Άσκησης 1.2

Έστω $\mathcal{S}_{ij} = (\phi_j', \phi_i')$, και $\mathcal{M}_{ij} = (\phi_j, \phi_i)$ για $i, j = 1,\dots,N$, με συναρτήσεις

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{h}, & x_{j-1} \le x \le x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{h}, & x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \qquad j = 1,\dots,N.$$

Παρατηρήστε ότι τώρα οι πίνακες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{M}$ αντιστοιχούν στους $N \times N$ υπο-πίνακες των αντίστοιχων πινάκων της Άσκησης 1.1.

Πίνακες της Άσκησης 1.3

Έστω $\mathcal{S}_{ij} = (\phi_j', \phi_i')$, και $\mathcal{M}_{ij} = (\phi_j, \phi_i)$ για $i, j = 0, 1,\dots,N+1$, με συναρτήσεις

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{h}, & x_{j-1} \le x \le x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{h}, & x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \qquad j = 1,\dots,N,$$

με

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h}, & x_0 \le x \le x_1, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}, \quad \text{και} \quad \phi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{h}, & x_N \le x \le x_{N+1}. \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}.$$

Αρχικά για τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα ακαμψίας $\mathcal{S}$, έχουμε

$$\mathcal{S}_{ii} = \int_0^1 \phi_i'(x)^2\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i'(x)^2\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'(x)^2\,dx = \frac{2}{h}, \quad i = 0,\dots,N+1,$$

με

$$\mathcal{S}_{0,0} = \int_0^1 \phi_0'(x)^2\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \phi_0'(x)^2\,dx = \frac{1}{h}.$$

και

$$\mathcal{S}_{N+1,N+1} = \int_0^1 \phi_{N+1}'(x)^2\,dx = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \phi_{N+1}'(x)^2\,dx = \frac{1}{h}.$$

Για τα μη-μηδενικά μη-διαγώνια στοιχεία, έχουμε

$$\mathcal{S}_{i,i+1} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)\,dx = -\frac{1}{h}, \quad i = 0,\dots,N,$$

και

$$\mathcal{S}_{i,i-1} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x)\,dx = -\frac{1}{h}, \quad i = 1,\dots,N+1,$$

Ανάλογα, για τον πίνακα μάζας $\mathcal{M}$, έχουμε

$$\mathcal{M}_{ii} = \int_0^1 \phi_i(x)^2\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)^2\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2\,dx = \frac{2h}{3}, \quad i = 1,\dots,N,$$

με

$$\mathcal{M}_{0,0} = \int_0^1 \phi_0(x)^2\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \phi_0(x)^2\,dx = \frac{h}{3}.$$

και

$$\mathcal{M}_{N+1,N+1} = \int_0^1 \phi_{N+1}(x)^2\,dx = \int_{x_N}^{x_{N+1}} \phi_{N+1}(x)^2\,dx = \frac{h}{3}.$$

Για τα μη-μηδενικά μη-διαγώνια στοιχεία, έχουμε

$$\mathcal{M}_{i,i+1} = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\,dx = \frac{h}{6}, \quad i = 0,\dots,N,$$

και

$$\mathcal{M}_{i,i-1} = \int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)\phi_{i-1}(x)\,dx = \frac{h}{6}, \quad i = 1,\dots,N+1.$$

□

Άσκηση 1.5 *Εξηγήστε τι είναι λανθασμένο τόσο στην ασθενή όσο και στην κλασσική διατύπωση του παρακάτω προβλήματος,*

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0,1) \\ \quad u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, εξηγήστε γιατί και οι δυο διατυπώσεις για το παραπάνω πρόβλημα δεν είναι καλά ορισμένες.

Λύση Αρχικά θα μελετήσουμε την κλασσική διατύπωση. Έστω u λύση του προβλήματος. Η $u + C$ για κάθε σταθερά C είναι επίσης λύση του. Συνεπώς, το πρόβλημα δεν έχει μοναδική λύση. Η ασθενής μορφή του παραπάνω προβλήματος μπορεί να γραφεί ως: Ζητάμε $u \in V = \mathcal{C}([0,1])$, τέτοια ώστε

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv, \quad \forall\, v \in V.$$

Έστω $v = C$, με C μια σταθερά. Είναι προφανές ότι $v \in \mathcal{C}([0,1])$. Συνεπώς, για αυτή την v, η ασθενής μορφή θα γράφετε,

$$0 = C\int_0^1 f,$$

δηλαδή $(f,1) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι αν η δοσμένη f δεν έχει αυτή την ιδιότητα, τότε το πρόβλημα δεν έχει ασθενή λύση. Αν η συνάρτηση f έχει την παραπάνω ιδιότητα, τότε η ασθενής λύση ορίζεται μόνο έως μια σταθερά. □

Άσκηση 1.6 *Έστω $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ μια διαμέριση του $J = [0,1]$ και $h = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο S, έτσι ώστε*

$$S = \left\{ v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1 \quad \textit{και} \quad v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

Έστω $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ με $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, βάση του S. Επίσης, ορίζουμε την παρεμβάλουσα μιας συνάρτησης $v \in \mathcal{C}([0,1])$ με $v_I \,:\, \mathcal{C}([0,1]) \to S$ με τύπο

$$v_I := \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\phi_i.$$

Έστω $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = v(1) = 0\}$, δείξτε ότι

1. $\|(u - u_I)'\|_{L_2(J)} \le Ch\|u''\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, u \in V,$
2. $\|u - u_I\|_{L_2(J)} \le Ch^2\|u''\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, u \in V,$

με σταθερά C ανεξάρτητη των h και u.

Λύση

Για την (1):

Η ανισότητα που χρειάζεται να αποδείξουμε, μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u - u_I)'(x)^2\, dx \le C \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x_{i-1})^2 u''(x)^2\, dx.$$

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι αρκεί να δείξουμε την παρακάτω ανισότητα

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (u - u_I)'(x)^2\, dx \le C \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x_{i-1})^2 u''(x)^2\, dx.$$

για ένα τυχαίο υπο-διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$. Αρχικά κάνουμε αλλαγή μεταβλητών στα ολοκληρώματα, δηλαδή θέτοντας $x = x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1})$, και θέτοντας $e = u - u_I$, η τελευταία ανισότητα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής.

$$\int_0^1 \tilde{e}'(t)^2\, dt \le C \int_0^1 \tilde{e}''(t)^2\, dt,$$

όπου $\tilde{e}(t) = e(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε την τελευταία ανισότητα. Έστω $w = \tilde{e}$ για χάριν απλότητας και θα γράφουμε x αντί για $\tilde{x}$. Παρατηρήστε ότι $w(0) = w(1) = 0$. Από Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $w'(\xi) = 0$. Οπότε,

$$w'(y) = \int_\xi^y w''(x)\, dx.$$

Από ανισότητα Schwartz θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
|w'(y)| &= \left| \int_\xi^y w''(x)\, dx \right| \\
&= \left| \int_\xi^y 1 \cdot w''(x)\, dx \right| \\
&\le \left| \int_\xi^y 1^2\, dx \right|^{1/2} \left| \int_\xi^y w''(x)^2\, dx \right|^{1/2} \\
&= |y - \xi|^{1/2} \left| \int_\xi^y w''(x)^2\, dx \right|^{1/2} \\
&\le |y - \xi|^{1/2} \left(\int_0^1 w''(x)^2\, dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$|w'(y)|^2 \le |y - \xi| \int_0^1 w''(x)^2\, dx.$$

Ολοκληρώνοντας,

$$\int_0^1 |w'(y)|^2\,dy \le \int_0^1 |y-\xi| \int_0^1 w''(x)^2\,dx\,dy \le \sup_{0<\xi<1} \int_0^1 |y-\xi|\,dy \int_0^1 w''(x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 w''(x)^2\,dx.$$

Συνολικά,

$$\int_0^1 |w'(x)|^2\,dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 w''(x)^2\,dx. \tag{1.1}$$

Για την (2):

Ανάλογα με το πρώτο ερώτημα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0^1 \tilde{e}(t)^2\,dt \le C\int_0^1 \tilde{e}''(t)^2\,dt,$$

όπου $\tilde{e}(t) = e(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$. Αφού $w(0) = 0$, τότε

$$w(x) = \int_0^x w'(t)\,dt.$$

Από ανισότητα Schwartz θα έχουμε,

$$\int_0^1 w(x)^2\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^x 1\cdot w'(t)\,dt\right)^2 dx \le \int_0^1 \left(\int_0^x t\right)\cdot\left(\int_0^x w'(t)^2\,dt\right) dx$$
$$\le \int_0^1 x\left(\int_0^x w'(t)^2\,dt\right) dx \le \int_0^1 x\left(\int_0^1 w'(t)^2\,dt\right) dx$$
$$\le \left(\int_0^1 w'(t)^2\,dt\right)\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 w'(t)^2\,t.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 w(x)^2\,dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 w'(x)^2\,dx.$$

Συνδυάζοντας την με την 1.1, έχουμε το τελικό ζητούμενο. □

Άσκηση 1.7 *Έστω το διάστημα $J = [0,1]$ και $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) : \|v'\|_{L_2(J)} < \infty \;\text{ και }\; v(0) = 0\}$. Θεωρούμε την διγραμμική μορφή $\alpha(\cdot,\cdot) : V\times V \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\alpha(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx.$$

Δείξτε ότι

$$\|v\|^2_{L_2(J)} + \|v'\|^2_{L_2(J)} \le C\alpha(v,v),\;\; \forall\, v\in V. \tag{1.2}$$

Βρείτε ακριβώς την σταθερά C.

Λύση Από την Άσκηση 1.6 έχουμε ότι $\|v\|_{L_2(J)} \le c\|v'\|_{L_2(J)}$ με $c = \frac{1}{2}$. Τότε, προσθέτοντας και στα δυο μέλη τον όρο $\|v'\|_{L_2(J)}$, έχουμε,

$$\|v\|^2_{L_2(J)} + \|v'\|^2_{L_2(J)} \le (c^2+1)\|v'\|^2_{L_2(J)}.$$

Παρατηρήστε ότι $\|v'\|^2_{L_2(J)} = \alpha(v,v)$ και τότε,

$$\|v\|^2_{L_2(J)} + \|v'\|^2_{L_2(J)} \le (c^2+1)\alpha(v,v).$$

Παρατηρήστε ότι $C = \frac{5}{4}$. □

Άσκηση 1.8 *Έστω $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ μια διαμέριση του $J = [0,1]$ και $h_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, \ldots, n$. Θεωρήστε τον μέθοδο πεπερασμένων διαφορών που παριστάνεται από*

$$-\frac{2}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+1}} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i}\right) = f(x_i). \tag{1.3}$$

Δείξτε ότι η $\tilde{u}_S = \sum_i U_i\phi_i$ ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα

$$\alpha(\tilde{u}_S, v) = Q(fv), \quad \forall\, v \in S,$$

με

$$\alpha(v, w) = \int_0^1 v'(x)w'(x)\,dx,$$

και ο S αποτελείται από γραμμικές συναρτήσεις,

$$S = \left\{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1 \quad \textit{και} \quad v(0) = 0\right\}$$

Επιπλέον, ο Q δηλώνει τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης που βασίζεται στον κανόνα του τραπεζίου,

$$Q(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} w(x_i).$$

Υποθέστε $h_0 = h_{n+1} = 0$.

Λύση Η σχέση (1.3) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή,

$$KU = F, \quad U = \{U_i\}_{i=1}^{n-1},$$

όπου

$$F_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Η $v \in S$, συνεπώς μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδιασμός της βάσης, δηλαδή $v = \sum_i V_i\phi_i$ με $V_i = v(x_i)$ και $V = \{v(x_i)\}_{i=1}^{n-1}$. Από την γραμμικότητα της διγραμμικής μορφής $\alpha(\cdot,\cdot)$ ως προς τις δυο μεταβλητές, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha(\tilde{u}_S, v) = \alpha\left(\sum_i U_i\phi_i, \sum_j V_j\phi_j\right) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha(\phi_j, \phi_i)U_iV_j = (KU, V) \\ &= (F, V) = \sum_{i=0}^{n} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} f(x_i)v(x_i) = Q(fv).\end{aligned}$$

Οπότε, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών αυτής της άσκησης είναι ισοδύναμη με την προσέγγιση πολυωνημικής συνάρτησης όπου το δεξί μέρος προσεγγίζεται από τον κανόνα αριθμήτικής ολοκλήρωσης. □

Άσκηση 1.9 *Έστω Q ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης της προηγούμενης άσκησης. Δείξτε την παρακάτω εκτίμηση σφάλματος.*

$$\left|Q(w) - \int_0^1 w(x)\,dx\right| \le Ch^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |w''(x)|\,dx.$$

Λύση Έστω $w_I \in S$ η κατά τημήματα γραμμική παραμβάλουσα της w. Ο κανόνας του τραπεζίου είναι ακριβής για την w_I και αφού $w_I(x_i) = w(x_i)$, θα έχουμε ότι

$$\int_0^1 w_I(x)\,dx = Q(w_I) = Q(w).$$

Έστω $e = w - w_I$ τότε η ζητούμενη εκτίμηση μπορεί να γραφεί

$$\left|\int_0^1 e(x)\,dx\right| \le Ch^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e''(x)|\,dx.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ανάλογες τεχνικές με την Άσκηση 1.6. Αρκεί να δείξουμε την παρακάτω ανισότητα

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} e(x)\,dx\right| \le C(x_i - x_{i-1})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e''(x)|\,dx,$$

ή ισοδύναμα κάνοντας αλλαγή μεταβλητών, θα έχουμε

$$\left|\int_0^1 \tilde{e}(t)\,dt\right| \le C \int_0^1 |\tilde{e}''(t)|\,dt,$$

όπου $\tilde{e}(t) = e(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$. Χάριν απλότητας, θα συμβολίζουμε $\zeta = \tilde{e}$ και τότε $\zeta(0) = \zeta(1) = 0$ αφού η w και w_I είναι ίσες στους κόμβους του διαμερισμού. Από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\zeta'(\xi) = 0$. Τότε,

$$\zeta(x) = \int_0^x \zeta'(t)\,dt, \quad \text{και} \quad \zeta'(t) = \int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \zeta(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 \int_0^x \zeta'(t)\,dt\,dx\right| &= \left|\int_0^1 \int_0^x \int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\,dt\,dx\right| \\
&\le \int_0^1 \int_0^x \left|\int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\right| dt\,dx \\
&\le \int_0^1 \int_0^1 \left|\int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\right| dt\,dx \\
&= \int_0^1 \left|\int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\right| dt \\
&\le \int_0^\xi \left|\int_t^\xi \zeta''(\tau)\,d\tau\right| dt + \int_\xi^1 \left|\int_\xi^t \zeta''(\tau)\,d\tau\right| dt \\
&\le \int_0^\xi \int_t^\xi |\zeta''(\tau)|\,d\tau\,dt + \int_\xi^1 \int_\xi^t |\zeta''(\tau)|\,d\tau\,dt \\
&\le \int_0^\xi \int_0^\xi |\zeta''(\tau)|\,d\tau\,dt + \int_\xi^1 \int_\xi^1 |\zeta''(\tau)|\,d\tau\,dt \\
&\le \xi \int_0^\xi |\zeta''(\tau)|\,d\tau + (1-\xi) \int_\xi^1 |\zeta''(\tau)|\,d\tau \\
&\le \max\{\xi, 1-\xi\} \int_0^1 |\zeta''(x)|\,dx
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 1.10 *Θεωρήστε το πρόβλημα,*

$$\begin{cases} -u'' = f, & x \in (0,1) \\ \quad u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Έστω το συναρτησιακό

$$F(v) := \frac{1}{2}\int_0^1 v'(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \quad \forall\, v \in V,$$

με $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = v(1) = 0\}$. Δείξτε ότι η λύση $u \in V$ του ασθενούς προβλήματος ελαχιστοποιεί το παραπάνω συναρτησιακό στον V.

Λύση Η ασθενής μορφή του προβλήματος είναι η εξής. Ζητείτε $u \in V$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \quad \forall\, v \in V.$$

Έστω $t \in \mathbb{R}$ και $w = u + tv$, τότε

$$\begin{aligned}
F(w) &= \frac{1}{2}\int_0^1 w'(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)w(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x) + tv'(x))^2\,dx - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx - t\int_0^1 f(x)v(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx + t\left(\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 v'(x)^2\,dx \\
&= F(u) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 v'(x)^2\,dx \geq F(u).
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ασθενής μορφή. Συνεπώς, το συναρτησιακό λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του στο u. Στην ουσία, δείξαμε ότι αν u λύση της παραπάνω ασθενούς μορφής, τότε το συναρτησιακό που ορίσαμε λαμβάνει την ελάχιστη τιμή στην u. Μπορούμε να δείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή αν το συναρτησιακό λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του στην u τότε αναγκαστικά u λύση της ασθενούς μορφής. Πράγματι, θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = F(u + tv)$, τότε

$$g'(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2\,dx - \int_0^1 f(x)u(x)\,dx + t\left(\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 v'(x)^2\,dx.$$

Επίσης,

$$g''(t) = \int_0^1 v'(x)^2\,dx \geq 0,$$

και ως εκ τούτου η g λαμβάνει το ελάχιστο της στο $t = 0$ αν $\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$. Δηλαδή η g λαμβάνει το ελάχιστο της στο $t = 0$ αν u ασθενής λύση. □

Άσκηση 1.11 *Η συνάρτηση u ορίζεται στο διάστημα $J = [a, b]$ και είναι τέτοια ώστε $u(0) = 0$. Δείξτε την παρακάτω ανισότητα*

$$\|u\|_{L_2(J)} \leq (b - a)\|u'\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_0^1(J)$$

Η παραπάνω ανισότητα ονομάζεται ανισότητα του Poincaré.

Λύση Επειδή $u(a) = 0$, έχουμε,

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|u(x)|^2 = \left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2 &\leq \int_a^x 1^2\,dt \int_a^x u'(t)^2\,dt \\
&\leq (b - a)\int_a^b u'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$|u(x)|^2 \leq (b - a)\|u'\|^2_{L_2(J)}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη,

$$\|u\|_{L_2(J)} \leq (b - a)\|u'\|_{L_2(J)}, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

□

Άσκηση 1.12 *Έστω $J = [0, 1]$ και u_S η λύση του ασθενούς προβλήματος $\alpha(u_S, v) = (f, v)$, $\forall\, v \in S$, όπου S και $\tilde{u}_S$ όπως στην Άσκηση 1.8. Δείτε ότι*

$$|\alpha(u_S - \tilde{u}_S, v)| \leq Ch^2\left(\|f'\|_{L_2(J)} + \|f''\|_{L_2(J)}\right)\left(\|v\|_{L_2(J)} + \|v'\|_{L_2(J)}\right). \tag{1.4}$$

Λύση Χρησιμοποιώντας τις ασκήσεις (1.6) και (1.9), έχουμε,

$$
\begin{aligned}
|\alpha(\tilde{u}_S - u_S, v)| = |Q(fv) - (f,v)| = \left| Q(fv) - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \right| &\le Ch^2 \int_0^1 |(f(x)v(x))''|\,dx \\
&= Ch^2 \int_0^1 |f''(x)v(x) + 2f'(x)v'(x) + f(x)v''(x)|\,dx \\
&= Ch^2 \int_0^1 |f''(x)v(x) + 2f'(x)v'(x)|\,dx, \quad \forall\, v \in S.
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι $v'' = 0$, αφού $v \in S$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Schwartz, θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |f''(x)v(x) + 2f'(x)v'(x)|\,dx &\le \int_0^1 |f''(x)v(x)|\,dx + \int_0^1 |f'(x)v'(x)|\,dx + \int_0^1 1\cdot|f'(x)v'(x)|\,dx \\
&\le \int_0^1 |f''(x)v(x)|\,dx + \int_0^1 |f'(x)v'(x)|\,dx + \left(\int_0^1 1^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f'(x)v'(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&\le \|f''\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)} + \|f'\|_{L_2(J)}\|v'\|_{L_2(J)} + \|f'v'\|_{L_2(J)} \\
&\le \|f''\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)} + \|f'\|_{L_2(J)}\|v'\|_{L_2(J)} + C\|(f'v')'\|_{L_2(J)} \\
&\le C\left(\|f''\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)} + \|f'\|_{L_2(J)}\|v'\|_{L_2(J)} + \|f''v'\|_{L_2(J)}\right) \\
&\le C\left(\|f''\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)} + \|f'\|_{L_2(J)}\|v'\|_{L_2(J)} + \|f''\|_{L_2(J)}\|v'\|_{L_2(J)} + \|f'\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)}\right) \\
&\le C\left(\|f'\|_{L_2(J)} + \|f''\|_{L_2(J)}\right)\left(\|v\|_{L_2(J)} + \|v'\|_{L_2(J)}\right).
\end{aligned}
$$

Στις παραπάνω ανισότητες χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα του Poincaré (βλ. Άσκηση 1.11), το γεγονός ότι $v'' = 0$ και την μη-αρνητικότητα του όρου $\|f'\|_{L_2(J)}\|v\|_{L_2(J)}$. □

Άσκηση 1.13 *Θεωρήστε τις συναρτήσεις όπως στην Άσκηση 1.12. Δείξτε ότι*

$$\|u_S' - \tilde{u}_S'\|_E \le Ch^2\left(\|f'\|_{L_2(J)} + \|f''\|_{L_2(J)}\right)$$

Η νόρμα $\|\cdot\|_E$ ονομάζεται νόρμα ενέργειας και ορίζεται ως

$$\|v\|_E = \sqrt{\alpha(v,v)}, \quad \forall\, v \in V.$$

Λύση Παίρνοντας $v = u_S - \tilde{u}_S$ στην (1.4), λαμβάνουμε

$$\|u_S - \tilde{u}_S\|_E^2 = \alpha(u_S - \tilde{u}_S, u_S - \tilde{u}_S) \le Ch^2\left(\|f'\|_{L_2(J)} + \|f''\|_{L_2(J)}\right)\left(\|u_S - \tilde{u}_S\|_{L_2(J)} + \|\tilde{u}_S' - \tilde{u}_S'\|_{L_2(J)}\right).$$

Χρησιμοποιώντας την (1.2) θα έχουμε

$$\|u_S - \tilde{u}_S\|_{L_2(J)} \le C\|u_S - \tilde{u}_S\|_E, \;\; \text{και} \;\; \|u_S' - \tilde{u}_S'\|_{L_2(J)} \le C\|u_S - \tilde{u}_S\|_E.$$

□

Άσκηση 1.14 *Έστω $V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = 0\}$ και $\alpha(\cdot,\cdot) \,:\, V \times V \to \mathbb{R}$ η διγραμμική μορφή η οποία ορίζεται ως*

$$\alpha(v,w) = \int_0^1 v'(x)w'(x)\,dx.$$

Δείξτε ότι

$$\|v\|_{max}^2 \le \alpha(v,v), \quad \forall\, v \in V \cap \mathcal{C}^1(0,1).$$

Εδώ $\|v\|_{max} = \max_{0\le x\le 1}|v(x)|$.

Λύση Η απόδειξη είναι ανάλογη της Άσκησης 1.11. Επειδή $v(0) = 0$, έχουμε,

$$v(x) = \int_0^x v'(t)\,dt, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
|v(x)|^2 = \left(\int_0^x v'(t)\,dt\right)^2 &\leq \int_0^x 1^2\,dt \int_0^x v'(t)^2\,dt \\
&\leq x\int_0^1 v'(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$|v(x)|^2 \leq \|v'\|^2_{L_2(0,1)} = \alpha(v,v), \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Λαμβάνοντας το max στο αριστερό μέλος, έχουμε

$$\|v\|_{max} \leq \alpha(v,v), \quad \forall\, v \in V \cap \mathcal{C}^1(0,1).$$

□

Άσκηση 1.15 *Έστω το πρόβλημα*

$$
\begin{cases}
-\epsilon u'' + u = f, \quad x \in J = [0,1] \\
\qquad\qquad u(0) = u'(1) = 0,
\end{cases}
$$

με σταθερά $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι η λύση του παραπάνω προβλήματος ικανοποιεί την εκ των προτέρων εκτίμηση

$$\|\epsilon u''\|_{L_2(J)} \leq \|f\|_{L_2(J)}.$$

Λύση Λαμβάνουμε το εσωτερικό γινόμενο με $\epsilon u''$. Τότε,

$$-\epsilon^2\|u''\|^2_{L_2(J)} + \epsilon(xu', u'') + \epsilon(u, u'') = \epsilon(f, u'').$$

Από ολοκλήρωση κατά παράγοντες, θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\epsilon(xu', u'') = \epsilon\int_0^1 xu'(x)u''(x)\,dx &= \epsilon xu'(x)^2|_0^1 - \epsilon\int_0^1 u'(x)\left(xu''(x) + u'(x)\right)\,dx \\
&= -\epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)} - \epsilon\int_0^1 xu'(x)u''(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$\epsilon(xu', u'') = -\frac{1}{2}\epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)}.$$

Ανάλογα,

$$\epsilon(u, u'') = \epsilon\int_0^1 u(x)u''(x)\,dx = \epsilon u(x)u'(x)|_0^1 - \epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)} = -\epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)}.$$

Συνολικά,

$$-\epsilon^2\|u''\|^2_{L_2(J)} - \frac{3}{2}\epsilon\|u'\|^2_{L_2(J)} = \epsilon(f, u''),$$

ή ισοδύναμα

$$\epsilon^2\|u''\|^2_{L_2(J)} + \frac{3}{2}\|u'\|^2_{L_2(J)} = -\epsilon(f, u'') \leq \epsilon|(f, u'')| \leq \epsilon\|f\|_{L_2(J)}\|u''\|_{L_2(J)}.$$

Χρησιμοποιώντας την μη-αρνητικότητα του $\|u'\|^2_{L_2(J)}$, λαμβάνουμε

$$\epsilon^2\|u''\|^2_{L_2(J)} \leq \epsilon\|f\|_{L_2(J)}\|u''\|_{L_2(J)},$$

ή ισοδύναμα

$$\|\epsilon u''\|_{L_2(J)} \leq \|f\|_{L_2(J)}.$$

□

Άσκηση 1.16 *Θεωρήστε το πρόβλημα δυο σημείων της μορφής,*

$$
\begin{cases}
-u'' + qu = f, \quad x \in J = [0,1] \\
\qquad\qquad u(0) = u(1) = 0,
\end{cases}
$$

με q, $f \in \mathcal{C}[0,1]$ και $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι αν $u \in \mathcal{C}_0^2[0,1]$, τότε υπάρχει μια σταθερά C η οποία εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος, έτσι ώστε

$$\|u\|_{L_2(J)} + \|u'\|_{L_2(J)} + \|u''\|_{L_2(J)} \leq C\|f\|_{L_2(J)}.$$

Λύση Η ασθενής μορφή του προβλήματος είναι η ακόλουθη. Ζητάμε συνάρτηση $u \in V$ τέτοια ώστε

$$(u', v') + (qu, v) = (f, v), \quad \forall\, v \in V,$$

με

$$V = \{v \in \mathcal{C}([0,1]) \,:\, v(0) = v(1) = 0\}.$$

Λαμβάνοντας $v = u$ στην ασθενή μορφή, θα έχουμε

$$\|u'\|^2_{L_2(J)} + (qu, u) = (f, u) \le \|f\|_{L_2(J)}\|u\|_{L_2(J)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$(qu, u) = \int_J q(x)u(x)^2\, dx \ge 0,$$

και ως εκ τούτου $\|u'\|^2_{L_2(J)} + (qu, u) \ge \|u'\|^2_{L_2(J)}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\|u'\|^2_{L_2(J)} &\le \|f\|_{L_2(J)}\|u\|_{L_2(J)}\\ &\le \|f\|_{L_2(J)}\|u'\|_{L_2(J)},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοπιήσαμε την ανισότητα του Poincaré (1.11). Συνολικά,

$$\|u'\|_{L_2(J)} \le \|f\|_{L_2(J)}. \tag{1.5}$$

Αν εφαρμόσουμε άλλη μια φορά την ανισότητα Poincaré, λαμβάνουμε

$$\|u\|_{L_2(J)} \le \|u'\|_{L_2(J)} \le \|f\|_{L_2(J)}, \tag{1.6}$$

όπου η τελευτάια εκτίμηση προήλεθε από την (1.5). Παρατηρούμε, από την εξίσωση του προβλήματος ότι

$$u'' = qu - f,$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned}\|u''\|_{L_2(J)} = \|qu - f\|_{L_2(J)} \le \|qu\|_{L_2(J)} + \|f\|_{L_2(J)} &\le \max_{0\le x\le 1}|q(x)|\|u\|_{L_2(J)} + \|f\|_{L_2(J)}\\ &\le \max_{0\le x\le 1}|q(x)|\|f\|_{L_2(J)} + \|f\|_{L_2(J)}\\ &= (\max_{0\le x\le 1}|q(x)| + 1)\|f\|_{L_2(J)}\end{aligned}$$

Η τελευταία εκτίμηση μαζί με τις (1.5) και (1.6), αποδεικνύουν το ζητούμενο. □

2 Πεπερασμένες διαφορές

2.1 Πρόβλημα δυο σημείων

Άσκηση 2.1 *Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών, με $a, b > 0$,*

$$\begin{cases} -x^2u''(x) - xu'(x) + 4u(x) = 20x^3, \;\; x \in J = [1,2],\\ \qquad\qquad u(1) = u(1) = 0.\end{cases}$$

1. *Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα χρησιμοποιώντας την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της πρώτης παραγώγου και την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου.*
2. *Ποιος είναι ο περιορισμός για το βήμα h, ώστε ο αντίστοιχος πίνακας που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση της λύσης να είναι αντιστρέψιμος;*

Λύση Θεωρουμε έναν φυσικό αριθμό N και μια διαμέριση του διαστήματος $[0, 1]$ από $N + 2$ ισαπέχοντα σημεία $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$, όπου $h = x_{i+1} - x_i$ για $i = 0, \ldots, N$. Χρησιμοποιώντας την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της πρώτης παραγώγου και την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου, λαμβάνουμε

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} - \frac{1}{x_i}\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \frac{4}{x_i^2}U_i = 20x_i, \quad = 1, \ldots, N.$$

με $U_0 = U_{N+1} = 0$ λόγω των συνοριακών συνθηκών. Το παραπάνω σχήμα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\left(-1 + \frac{h}{2x_i}\right)U_{i-1} + \left(2 + \frac{4h^2}{x_i}\right)U_i + \left(-1 - \frac{h}{2x_i}\right)U_{i+1} = 20x_ih^2, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στις παραπάνω εξισώσεις είναι

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{4h^2}{2x_1} & -1 - \frac{h}{2x_1} & 0 & 0 & 0 \\ -1 + \frac{h}{2x_2} & 2 + \frac{4h^2}{2x_2} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 - \frac{h}{2x_{N-1}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 + \frac{h}{2x_N} & 2 + \frac{4h^2}{2x_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 20x_1 \\ 20x_2 \\ \vdots \\ 20x_{N-1} \\ 20x_N \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Ο πίνανας του συστήματος έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο αν $\frac{h}{2}\max_{1\le x\le 2}\left|-\frac{1}{x}\right| < 1$. Δηλαδή αν $h < 2$.
□

Άσκηση 2.2 *Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών, με $a, b > 0$,*

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in J = [0, 1], \\ \qquad au(0) + bu'(0) = c, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

1. *Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα με τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης τάξης ακρίβεια δυο.*
2. *Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή γραμμικού συστήματος.*

Λύση Θεωρουμε έναν φυσικό αριθμό N και μια διαμέριση του διαστήματος $[0, 1]$ από $N + 2$ ισαπέχοντα σημεία $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$, όπου $h = x_{i+1} - x_i$ για $i = 0, \ldots, N$. Τότε, για κάθε σημείο που διαμερισμού x_i, για $i = 1, \ldots, N$, θα ισχύει

$$-u''(x_i) + u(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Συμβολίζουμε τις προσεγγίσεις των $u(x_i)$ με U_i για $i = 0, \ldots, N + 1$. Λόγω της συνοριακής συνθήκης στο δεξί άκρο, υποθέτουμε ότι $U_{N+1} = 0$ αφού $u(x_{N+1}) = 0$. Υποθέτουμε ότι η u επεκτείνεται για $x < 0$, και αφού για h πολύ μικρό, ισχύει ότι

$$u'(x_0) \approx \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h}.$$

Τότε, για το αριστερό άκρο, θα έχουμε

$$au(x_0) + b\frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} \approx c,$$

δηλαδή

$$u(x_0 - h) \approx \frac{2ah}{b}u(x_0) + u(x_0 + h) - \frac{2ch}{b}.$$

Τώρα, προσεγγίζουμε την $u''(x_0)$ με την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δευτερης παραγώγου και χρησιμοποιούμε την τελευταία σχέση. Έχουμε,

$$u''(x_0) \approx \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} \approx \frac{2u(x_0 + h) - \left(2 - \frac{2a}{b}\right)u(x_0)}{h^2} - \frac{2c}{bh}.$$

Για την προσέγγιση της $u''(x)$ στα σημεία x_i, $i = 1, \dots, N$, χρησιμοποιούμε την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δευτερης παραγώγου και αν υποθέσουμε ότι $u \in \mathcal{C}^{(4)}[0,1]$, τότε

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + u(x_i) = f(x_i) + \eta_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Για να δείξουμε ότι το σχημα έχει τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης τάξης ακρίβεια δυο, θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά C η οποία είναι ανεξάρτηση του h τέτοια ώστε,

$$|\eta_i| \leq Ch^2 \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)|, \quad i = 1, \dots, N.$$

Για το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης, ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= -\frac{2u(x_1) - \left(2 - \frac{2a}{b}h\right) u(x_0)}{h^2} + u(x_0) - f(x_0) + \frac{2c}{bh} \\
\eta_i &= -\frac{u(x_{i+1} - 2u(x_i) + u(x_{i-1}}{h^2} + u(x_i) - f(x_i), \quad i = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Αναπτύσουμε την u κατά Taylor για $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1}) &= u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^+) \\
u(x_{i-1}) &= u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^-).
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2 u''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^+) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^-), \quad i = 1, \dots, N.$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση στο σημείο x_i, δηλαδή οτι $-u''(x_i) + u(x_i) - f(x_i) = 0$ για $i = 1, \dots, N$, έχουμε

$$\eta_i = -\frac{h^2}{24}\left(u^{(4)}(\xi_i^+) + u^{(4)}(\xi_i^-)\right),$$

και ως εκ τούτου

$$|\eta|_j \leq \frac{h^2}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)|.$$

Για το η_0. Από Taylor,

$$u(x_1) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) + \frac{h^3}{6}u^{'''}(\xi), \;\; \xi \in (x_0, x_1).$$

Πάλι, με την βοήθεια της εξίσωσης στο x_0,

$$\eta_0 = -\frac{2}{h}u'(x_0) - \frac{2a}{bh}u'(x_0) + \frac{2c}{bh} - \frac{h^3}{3}u'''(\xi).$$

Από την συνοριακή συνθήκι, έχουμε

$$au'(x_0) + bu'(x_0) - c = 0,$$

και ως εκ τούτου

$$\eta_0 = -\frac{h}{3}u'''(\xi).$$

Δηλαδή,

$$|\eta_0| \leq \frac{h}{3} \max_{0 \leq x \leq 1} |u'''(x)|.$$

Συνεπώς, το σχημα με τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης τάξης ακρίβεια δυο, θα είναι

$$\begin{aligned}
-\frac{2U_1 - \left(2 - \frac{2a}{b}\right) U_0}{h^2} + U_0 &= f(x_0) - \frac{2c}{bh}, \\
-\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + U_j &= f(x_j), \quad j = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} 2+h^2-\frac{2a}{b}h & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N_1} \\ U_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2c}{b}h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

□

2.2 Εξίσωση μεταφοράς

Άσκηση 2.3 *Θεωρούμε την εξίσωσης μεταφοράς,*

$$\begin{cases} u_t(x,t) + au_x(x,t) = 0, & x \in [0,1], \ \ t \in [0,T] \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,1], \\ u(a,t) = \phi(x), & t \in [0,T]. \end{cases}$$

Δείξτε ότι οι μέθοδοι upwind και Lax–Wendroff δίνουν την ακριβή λύση για $\lambda = 1$.

Λύση Θεωρουμε έναν φυσικό αριθμό N και μια διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$ από $N+2$ ισαπέχοντα σημεία $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$, όπου $h = x_{i+1} - x_i$ για $i = 0,\ldots,N$. Επιπλέον, θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό M και μια διαμέριση του διαστήματος $[0,T]$ από $M+1$ ισαπέχοντα σημεία $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T$, όπου $k = t_{i+1} - t_i$ για $i = 0,\ldots,M-1$.

Μέθοδος upwind

Οι προσεγγίσεις U_i^n των τιμών $u(x_i,t_n)$, παράγονται από τις ακόλουθες εξισώσεις,

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} + \alpha\frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h} &= 0, \qquad i = 1,\ldots,N+1, \ n = 0,\ldots,M-1, \\ U_i^0 &= g(x_i), \quad i = 0,\ldots,N+1, \\ U_0^n &= \phi_0(t^n), \quad n = 0,\ldots,M. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\lambda = \frac{ak}{h}$, τότε η μέθοδος γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &= (1-\lambda)U_i^n + \lambda U_{i-1}^n & & i = 1,\ldots,N+1, \ n = 0,\ldots,M-1, \\ U_i^0 &= g(x_i), & & i = 0,\ldots,N+1, \\ U_0^n &= \phi_0(t^n), & & n = 0,\ldots,M. \end{aligned}$$

Αν $\lambda = 1$, τότε η μέθοδος upwind για την εξίσωση μεταφοράς παίρνει την μορφή

$$U_i^{n+1} = U_{i-1}^n, \quad i = 1,\ldots,N+1, \ \text{και} \ n = 0,\ldots,M-1.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$U_i^{n+1} = U_{i-1}^n = U_{i-1}^{n-1} = \cdots = U_{i-n}^1 = U_{i-(n+1)}^0 = g(x_{i-(n+1)}).$$

Γνωρίζουμε ότι η ακριβής λύσης είναι $u(x_i,t_{n+1}) = g(x_i - at_{n+1})$ και τότε,

$$x_i - at_{n+1} = x_i - a(n+1)k = x_i - \frac{ak}{h} = x_i - (n+1)h = x_{i-(n+1)}.$$

Επομένως,

$$u(x_i,t_{n+1}) = g(x_i - at_{n+1}) = g(x_{i-(n+1)}) = U_i^{n+1},$$

δηλαδή η μέθοδος upwind υπολογίζει την ακριβή λύση.

Μέθοδος Lax-Wendroff

Οι προσεγγίσεις U_i^n των τιμών $u(x_i,t_n)$, παράγονται από τις ακόλουθες εξισώσεις,

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{j+1}-U_i^j}{k}+\alpha\frac{U_{i+1}^j-U_{i-1}^j}{2h}&=0, \qquad i=1,\dots,N, j=0,\dots,M-1,\\ U_i^0&=g(x_i), \quad i=0,\dots,N+1,\\ U_0^j&=\phi_0(t^j), \quad j=0,\dots,M. \end{aligned}$$

Για $\lambda=\frac{ak}{h}$, ανάλογα με την μέθοδο upwind, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} U_i^{n+1}&=-\frac{\lambda}{2}U_{i+1}^n+U_i^n+\frac{\lambda}{2}U_{i-1}^n, && i=1,\dots,N, j=0,\dots,M-1,\\ U_i^0&=g(x_i), && i=0,\dots,N+1,\\ U_0^j&=\phi_0(t^j), && j=0,\dots,M. \end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda=1$ είναι εύκολο να δούμε ότι

$$U_i^{n+1}=U_{i-1}^n, \quad i=1,\dots,N+1, \text{ και } n=0,\dots,M-1.$$

Συνεπώς, ανάλογα με την πρηγούμενη περίπτωση έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Άσκηση 2.4 *Θεωρούμε την εξίσωσης μεταφοράς,*

$$\begin{cases} u_t(x,t)+au_x(x,t)=0, & x\in[0,1], \ t\in[0,T]\\ u(x,0)=g(x), & x\in[0,1],\\ u(a,t)=\phi(x), & t\in[0,T]. \end{cases}$$

και την μέθοδο

$$(1+\lambda)U_i^{n+1}+(1-\lambda)U_{i-1}^{n+1}=(1-\lambda)U_i^n+(1+\lambda)U_{i-1}^n, \quad \lambda=\frac{ak}{h}.$$

1. *Βρείτε το σφάλμα διακριτοποίησης αυτής της μεθόδου.*
2. *Ποια είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;*
3. *Αν για κάθε n η τιμή U_0^{n+1} είναι γνωστή, δείξτε ότι το σχήμα είναι άμεσο.*
4. *Είναι von Neumann ευσταθής;*

Λύση Η μέθοδος μπορεί να γραφεί ισοδύναμα,

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{k}+\frac{U_{i-1}^{n+1}-U_{i-1}^n}{k}+a\left(\frac{U_i^{n+1}-U_{i-1}^{n+1}}{h}+\frac{U_i^n-U_{i-1}^n}{h}\right)=0.$$

Ορίζουμε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίσης η_i^n ως

$$\begin{aligned} \eta_i^n=&\frac{u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n)}{k}+\frac{u(x_{i-1},t_{n+1})-u(x_{i-1},t_n)}{k}\\ &+a\frac{u(x_i,t_{n+1})-u(x_{i-1},t_{n+1})}{h}+a\frac{u(x_i,t_n)-u(x_{i-1},t_n)}{h}. \end{aligned}$$

Αναπτύσουμε κατά Taylor με κέντρο το (x_i,t_{n+1}) τον πρώτο και τον τρίτο όρι του τοπικού σφάλματος διακριτοποίσης. Τότε,

$$\begin{aligned} u(x_i,t_n)&=u(x_i,t_{n+1})-ku_t(x_i,t_{n+1})+\frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i,\theta_n^1), \quad \theta_n^1\in(t_n,t_{n+1})\\ u(x_{i-1},t_{n+1})&=u(x_i,t_{n+1})-hu_t(x_i,t_{n+1})+\frac{h^2}{2}u_{tt}(\xi_i^1,t_{n+1}), \quad \xi_n^1\in(x_{i-1},x_i). \end{aligned}$$

Επίσης, για τους υπόλοιπους όρους, αναπτύσσουμε με κέντρο το (x_{i-1},t_n),

$$\begin{aligned} u(x_{i-1},t_{n+1})&=u(x_{i-1},t_n)+ku_t(x_{i-1},t_n)+\frac{k^2}{2}u_{tt}(x_{i-1},\theta_n^2), \quad \theta_n^1\in(t_n,t_{n+1})\\ u(x_i,t_n)&=u(x_{i-1},t_n)+hu_t(x_{i-1},t_n)+\frac{h^2}{2}u_{tt}(\xi_i^2,t_n), \quad \xi_n^1\in(x_{i-1},x_i). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στο η_i^n, λαμβάνουμε

$$\eta_i^n = \frac{k}{2}\left(u_{tt}(x_i,\theta_n^2) - u_{tt}(x_i,\theta_n^1)\right) + \frac{h}{2}\left(u_{xx}(\xi_i^2,t_n) - u_{xx}(\xi_i^1,t_n)\right).$$

Συνεπώς, για το τοπικό σφάλμα διακριτοποίσης, θα ισχύει ότι

$$|\eta_i^n| \leq k \max_{0\leq t\leq T}|u_{tt}(x_i,t)| + h \max_{0\leq x\leq 1}|u_{tt}(x,t_n)|.$$

Παρατηρούμε ότι το αριθμητικό σχήμα έχει χωρίο εξάρτησης της προσέγγισης στο σημείο της λύσης (x_i,t_n), το οποίο αποτελείται από τα σημεία $(x_{i-n},0),\ldots,(x_i,0)$. Συνεπώς, για να ικανοποιείται κάποια συνθήκη CFL, θα πρέπει το σημείο $\tilde{x}_0 = x_i - at_n$ να ανήκει στο διάστημα $[x_{i-n},x_i]$. Αρκεί, λοιπόν, $x_{i-n} \leq x_i - at_n$, αφού πάντα έχουμε ότι $x_i - at_n \leq x_i$. Ισοδύναμα, θα πρέπει $ak \leq h$. Η τελευταία ανισότητα αποτελεί μια συνθήκη CFL για το σχήμα της άσκησης.

Τώρα, για το τελευταίο ερώτημα, υποθέτουμε ότι $U_i^n = w_n e^{irx_i}$ και θα πρέπει να δείξουμε ότι οι τιμές $|U_i^n|$ παραμένουν φραγμένες για κάθε $r\in\mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι για να είναι φραγμένες οι τιμές $|U_i^n|$, αρκεί να φράσσονται οι $|w_n|$ για κάθε n. Αντικαθιστούμε στο σχήμα και έχουμε

$$(1+\lambda)w_{n+1}e^{irx_i} + (1-\lambda)w_{n+1}e^{irx_{i-1}} = (1-\lambda)w_n e^{irx_i} + (1+\lambda)w_n e^{irx_{i-1}}.$$

Λύνοντας ως προς w_{n+1}, λαμβάνουμε

$$w_{n+1} = \beta w_n,$$

όπου

$$\beta = \frac{1-\lambda+(1+\lambda)e^{irh}}{1+\lambda+(1-\lambda)e^{-irh}}.$$

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι οι τιμές $|w_{n+1}|$ παραμένουν φραγμένες αφού $|\beta| = 1$. □

Άσκηση 2.5 *Θεωρούμε την εξίσωσης μεταφοράς,*

$$\begin{cases} u_t(x,t) + au_x(x,t) = 0, & x\in[0,1],\ \ t\in[0,T] \\ u(x,0) = g(x), & x\in[0,1], \\ u(a,t) = \phi(x), & t\in[0,T]. \end{cases}$$

και την μέθοδο

$$U_i^{n+1} = U_i^{n-1} - \lambda\left(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n\right),\quad \lambda = \frac{ak}{h}.$$

1. *Βρείτε το σφάλμα διακριτοποίσης της μεθόδου.*
2. *Ποία είναι η συνθήκη CFL για αυτή τη μέθοδο;*
3. *Αν για κάθε n η τιμή U_0^{n+1} είναι γνωστή δείξτε ότι το σχήμα είναι άμεσο.*
4. *Δείξτε ότι είναι von Neumann ευσταθής για $|\lambda|\leq 1$ και ασταθής για $|\lambda|>1$.*

Λύση Η μέθοδος μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής,

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^{n-1}}{k} + a\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{h} = .$$

Ορίζουμε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης ως

$$\eta_i^n = \frac{u(x_i,t_{n+1}) - u(x_i,t_{n-1})}{k} + a\frac{u(x_{i+1},t_n) - u(x_{i-1},t_n)}{h}.$$

Ανάλογα με την προηγούμενη άσκηση, κάνοντας κατάλληλες εκτιμήσεις από το θεώρημα του Taylor, θα έχουμε ότι

$$|\eta_i^n| \leq \frac{k^2}{3}\max_{0\leq t\leq T}|u_{ttt}(x_i,t)| + \frac{h^2}{3}\max_{0\leq x\leq 2}|u_{ttt}(x,t_n)|.$$

Παρατηρούμε ότι το αριθμητικό σχήμα έχει χωρίο εξάρτησης της προσέγγισης στο σημείο της λύσης (x_i, t_n), το οποίο αποτελείται από τα σημεία $(x_{i-n}, 0), \ldots, (x_{i+n}, 0)$. Συνεπώς, για να ικανοποιείται κάποια συνθήκη CFL, θα πρέπει το σημείο $\tilde{x}_0 = x_i - at_n$ να ανήκει στο διάστημα $[x_{i-n}, x_{i+n}]$. Αρκεί, λοιπόν, $x_{i-n} \leq x_i - at_n$ και $x_i - at_n \leq x_{i+n}$. Ισοδύναμα, θα πρέπει $|\lambda| \leq 1$. Η τελευταία ανισότητα αποτελεί μια συνθήκη CFL για το σχήμα της άσκησης.

Υποθέτουμε ότι $U_i^n = w_n e^{irx_i}$ και θα πρέπει να δείξουμε ότι οι τιμές $|U_i^n|$ παραμένουν φραγμένες για κάθε $r \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας στο σχήμα, θα έχουμε

$$w_{n+1} + i2\tau\, w_n - w_{n-1} = 0, \quad \tau = \lambda \sin(rh)\,.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια εξίσωση διαφορών και η γενική λύση της, θα είναι

$$w_n = c_1\rho_1^n + c_2\rho_2^n, \quad n \geq 0,$$

όπου c_1 και c_2 σταθερές και ρ_1, ρ_2 ρίζες της εξίσωσης $z^2 + i2\tau\, z - 1 = 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\rho_1, \rho_2 = -i\tau \pm \sqrt{1-\tau^2}$. Συνεπώς, αν $\tau^2 \leq 1$ τότε $|\rho_{1,2}| = 1$ και ως εκ τούτου η μέθοδος είναι von Neumann ευσταθής. Η απαίτηση $\tau^2 \leq 1$ είναι ισοδύναμη με $|\lambda| \leq 1$. Για $|\lambda| > 1$ έχουμε $\tau^2 > 1$ και τότε το μέτρο κάποιας εκ των δυο ριζών είναι μεγαλύτερο της μονάδας και αυτό έχει ως αποτέλεσμα το ότι η μέθοδος δεν είναι von Neumann ευσταθής. $\square$